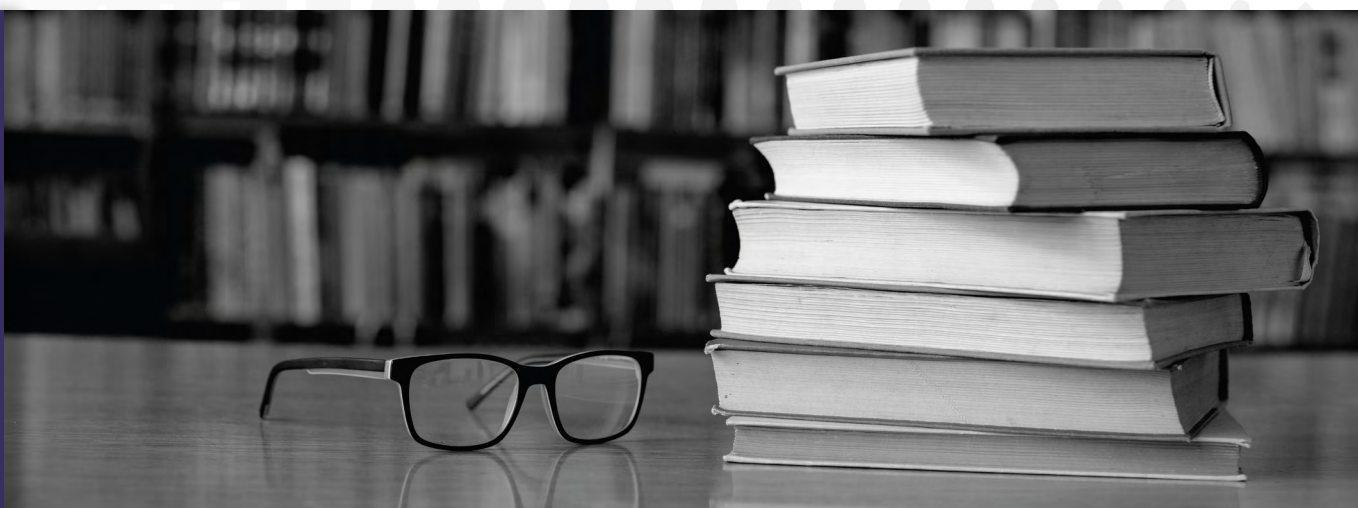




↑ Egzamin maturalny w 2021 roku

Vademecum nauczyciela



MATEMATYKA



MINISTERSTWO
EDUKACJI
I NAUKI

 **ORE**
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

Egzamin maturalny **w 2021 roku**

Vademecum nauczyciela

MATEMATYKA

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Warszawa 2021

Tekst komentarza
do wymagań egzaminacyjnych
Piotr Ludwikowski

Konsultacja merytoryczna
Elżbieta Witkowska

Redakcja i korekta
Marzena Odzimek-Jarosińska

Projekt okładki, layout
Wojciech Romerowicz

Redakcja techniczna i skład
Barbara Jechalska

Elementy graficzne: © Jovan/stock.adobe.com, © Pushkarevskyy/stock.adobe.com,
© absent84/stock.adobe.com, © Julien Eichinger/Fotolia.com, © LynxVector/Fotolia.com

© Ośrodek Rozwoju Edukacji
Warszawa 2021
Wydanie I

ISBN 978-83-66830-05-9

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl
tel. 22 345 37 00

Spis treści

Wprowadzenie.....	4
1. Wymagania egzaminacyjne.....	5
2. Komentarz do wymagań egzaminacyjnych.....	15
2.1. Zmiany w zapisach wymagań egzaminacyjnych.....	15
2.2. Komentarz do wprowadzonych zmian.....	15
2.3. Wykaz zmian w podstawie programowej.....	16
2.4. Omówienie zadań z arkuszy egzaminacyjnych	24
Podsumowanie.....	31

Wprowadzenie

Kilka lat temu, w jednym z wystąpień związanych z wprowadzaniem nowej formuły egzaminu maturalnego, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak zacytował fragment z podręcznika pszczelarza z XVIII wieku: „przede wszystkim nie gmerać przy ulu”. Szkole, podobnie jak pasiece, sprzyja stabilność. Niestety okoliczności zewnętrzne sprawiają, że rozwiązania przyjęte w obrębie systemu edukacji przestają być skuteczne wbrew staraniom nauczycieli oraz uczniów. Pojawia się wówczas konieczność zaprojektowania i wdrożenia pilnych zmian, które zapewnią lepsze efekty kształcenia.

Trwająca pandemia spowodowała, że nauka w polskich szkołach odbywa się zdalnie. Pomimo pewnych zalet takiego kształcenia, pojawiają się również problemy, które negatywnie wpływają na efekty zabiegów dydaktycznych nauczycieli. Oto kilka z nich: brak osobistego kontaktu nauczyciela z uczniem, brak interakcji w grupie rówieśniczej, trudności z rzetelną oceną aktualnych postępów ucznia, brak korelacji międzyprzedmiotowych – umiejętności wykorzystania zdobytej wiedzy przez ucznia podczas nauki różnych przedmiotów, brak odpowiedniego sprzętu do nauki zdalnej. Dlatego podjęto działania, które pomogą uczniom przygotować się do egzaminu maturalnego w 2021 roku.

Jednym z podstawowych dokumentów, który reguluje pracę szkoły, jest podstawa programowa. Zawarte w nim treści są konieczne do realizacji nauczania w trakcie kolejnych etapów edukacyjnych. Podstawa programowa określa również zakres podręczników dopuszczonych do użytku szkolnego. Realizowaną podstawę programową można poszerzać, ale nie można jej ograniczać.

Konsekwencją zapisów w podstawie programowej są wymagania egzaminacyjne publikowane w Informatorach maturalnych z każdego przedmiotu. Dotychczas, oba te dokumenty – w szczególności w kontekście opisu zakresu treści – niewiele się różniły. Zadania egzaminacyjne na egzaminie maturalnym mogły odwoływać się tylko do tych treści, które były opisane w wymaganiach podstawy programowej. Zatem w konkretnym arkuszu egzaminacyjnym nie były ujęte wszystkie treści. Po przeanalizowaniu zapisów podstawy programowej podjęto decyzję, że zostaną ograniczone wybrane treści. Ta redukcja powoduje, że wykreślone umiejętności szczegółowe nie będą tworzywem zadań egzaminacyjnych na egzaminie maturalnym w 2021 roku.

1. Wymagania egzaminacyjne

Załącznik nr 2 do Rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 16 grudnia 2020 r. zmieniającego rozporządzenie w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. z 2020 r., poz. 2314)

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

III etap edukacyjny

Ogólne wymagania egzaminacyjne

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
Zdający interpretuje i tworzy teksty o charakterze matematycznym, używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
- II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi.
- III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji, buduje model matematyczny danej sytuacji.
- IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię jasno wynikającą z treści zadania, tworzy strategię rozwiązania problemu.
- V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Szczegółowe wymagania egzaminacyjne

1. Liczby wymierne dodatnie. Zdający:
 - 1) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
 - 2) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
 - 3) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
 - 4) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne;
 - 5) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych;

- 6) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym.
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Zdający:
- 1) interpretuje liczby wymierne na osi liczbowej. Oblicza odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej;
 - 2) wskazuje na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek typu: $x \geq 3$, $x < 5$;
 - 3) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne;
 - 4) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne.
3. Potęgi. Zdający:
- 1) oblicza potęgę liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych;
 - 2) zapisuje w postaci jednej potęgi: iloczyny i ilorazy potęg o takich samych podstawach, iloczyny i ilorazy potęg o takich samych wykładnikach oraz potęgę potęgi (przy wykładnikach naturalnych);
 - 3) porównuje potęgi o różnych wykładnikach naturalnych i takich samych podstawach oraz porównuje potęgi o takich samych wykładnikach naturalnych i różnych dodatnich podstawach;
 - 4) zamienia potęgi o wykładnikach całkowitych ujemnych na odpowiednie potęgi o wykładnikach naturalnych.
4. Pierwiastki. Zdający:
- 1) oblicza wartości pierwiastków drugiego i trzeciego stopnia z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześćcianami liczb wymiernych;
 - 2) wyłącza czynnik przed znak pierwiastka oraz włącza czynnik pod znak pierwiastka;
 - 3) mnoży i dzieli pierwiastki drugiego stopnia;
 - 4) mnoży i dzieli pierwiastki trzeciego stopnia.
5. Procenty. Zdający:
- 1) przedstawia część pewnej wielkości jako procent tej wielkości i odwrotnie;
 - 2) oblicza procent danej liczby;
 - 3) oblicza liczbę na podstawie danego jej procentu;
 - 4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.
6. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
- 1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
 - 2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
 - 3) redukuje wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
 - 4) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne;
 - 5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnoży sumy algebraiczne;

- 6) wyłącza wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej poza nawias;
 - 7) wyznacza wskazaną wielkość z podanych wzorów, w tym geometrycznych i fizycznych.
7. Równania. Zdający:
- 1) zapisuje związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;
 - 2) sprawdza, czy dana liczba spełnia równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
 - 3) rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
 - 4) zapisuje związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
 - 5) sprawdza, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
 - 6) rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
 - 7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.
8. Wykresy funkcji. Zdający:
- 1) zaznacza w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych;
 - 2) odczytuje współrzędne danych punktów;
 - 3) odczytuje z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
 - 4) odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
 - 5) oblicza wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznacza punkty należące do jej wykresu.
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający:
- 1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów;
 - 2) wyszukuje, selekcionuje i porządkuje informacje z dostępnych źródeł;
 - 3) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych;
 - 4) analizuje proste doświadczenia losowe (np. rzut kostką, rzut monetą, wyciąganie losu) i określa prawdopodobieństwa najprostszych zdarzeń w tych doświadczeniach (prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w rzucie monetą, dwójki lub szóstki w rzucie kostką, itp.).
10. Figury płaskie. Zdający:
- 1) korzysta ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;

- 2) rozpoznaje wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznaje styczną do okręgu;
 - 3) korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności;
 - 4) rozpoznaje kąty środkowe;
 - 5) oblicza długość okręgu i łuku okręgu;
 - 6) oblicza pole koła, wycinka kołowego;
 - 7) stosuje twierdzenie Pitagorasa;
 - 8) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombów i w trapezach;
 - 9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
 - 10) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali;
 - 11) oblicza stosunek pól wielokątów podobnych;
 - 12) rozpoznaje wielokąty przystające i podobne;
 - 13) stosuje cechy przystawiania trójkątów;
 - 14) korzysta z własności trójkątów prostokątnych podobnych;
 - 15) rozpoznaje pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu. Rysuje pary figur symetrycznych;
 - 16) rozpoznaje figury, które mają oś symetrii, i figury, które mają środek symetrii. Wskazuje oś symetrii i środek symetrii figury;
 - 17) rozpoznaje symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
 - 18) konstruuje okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt;
 - 19) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.
11. Bryły. Zdający:
- 1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe;
 - 2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego i ostrosłupa.

III etap edukacyjny (poziom podstawowy i rozszerzony)

Ogólne wymagania egzaminacyjne

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	
Zdający interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.	Zdający używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.	Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.
III. Modelowanie matematyczne.	
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.	Zdający buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
IV. Użycie i tworzenie strategii.	
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.	Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.
V. Rozumowanie i argumentacja.	
Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.	Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Szczegółowe wymagania egzaminacyjne

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
1. Liczby rzeczywiste. Zdający:	
1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamek zwykłego, ułamek dziesiętny okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg); 2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych); 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $ x - a = b$, $ x - a < b$, $ x - a \geq b$; 2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych; 5) wykorzystuje podstawowe własności potęg; 6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym; 7) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej; 8) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).	
2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:	
1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$; 2) dzieli wielomiany przez dwumian $ax + b$; 3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias; 4) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany; 5) wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych; 6) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne.
3. Równania i nierówności. Zdający:	
1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności; 2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje wzory Viète'a; 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą; 4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą; 5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; 6) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$; 7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2, \quad \frac{x+1}{x} = 2x.$	3) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych; 4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$; 5) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych; 6) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe; 7) rozwiązuje proste nierówności wymierne typu: $\frac{x+1}{x+3} > 2, \quad \frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}$ $\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x};$ 8) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $ x+1 -2 =3, x+3 + x-5 >12.$
4. Funkcje. Zdający:	
1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego; 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznаныmi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość; 3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą); 4) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$; 5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru; 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie; 7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y= f(x)$, $y=c \cdot f(x)$, $y=f(cx)$; 2) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru; 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje); 11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).	
5. Ciągi. Zdający:	
1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; 2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; 3) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 4) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów; 2) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.
6. Trygonometria. Zdający:	
1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° ; 2) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną); 3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; 4) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie; 2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego); 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; 4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych; 5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6) rozwiązuje równania trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$.

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
7. Planimetria. Zdający:	
1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym; 2) korzysta z własności stycznej do okręgu; 3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów; 4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; 2) stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych; 3) rozpoznaje figury podobne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności; 4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.
8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:	
1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych; 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 6) oblicza odległość dwóch punktów; 7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) oblicza odległość punktu od prostej; 2) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności; 3) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu; 4) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach; 5) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
9. Stereometria. Zdający:	
1) rozpoznaje w graniastosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów; 2) rozpoznaje w graniastosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów; 3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości graniastosłupów.	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa płaszczyzną.
10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający:	
1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania; 2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto: 1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych; 2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe; 3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.
11. Rachunek różniczkowy. Zdający:	
	1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych; 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 3) korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej; 4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji; 5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych; 6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

2. Komentarz do wymagań egzaminacyjnych

2.1. Zmiany w zapisach wymagań egzaminacyjnych

Zmiana wymagań na egzaminie maturalnym w 2021 roku polega na ograniczeniu części wymagań szczegółowych zawartych w podstawie programowej poprzez całkowite skreślenie, zawężenie lub modyfikację treści danego wymagania. Powołany przez Ministerstwo Edukacji i Nauki zespół ekspertów przygotował projekt rozporządzenia, który przedstawiono do konsultacji społecznych, a wyniki tych działań przekazano nauczycielom i uczniom.

Jeszcze raz trzeba wyraźnie podkreślić, że zmiany, które są treścią tego opracowania nie dotyczą podstawy programowej. Ta ma być w pełni realizowana zgodnie z rozkładem materiału przygotowanym dla każdej klasy. Zmiany dotyczą wyłącznie wymagań egzaminacyjnych w 2021 roku. Warto jednak pamiętać, że uczelnie wyższe będą oczekiwać od maturzystów umiejętności zagadnień zapisanych w podstawie programowej, a nie tych, które mają być treścią wymagań egzaminacyjnych.

2.2. Komentarz do wprowadzonych zmian

Przed szczegółową analizą wprowadzonych zmian w wymaganiach egzaminacyjnych warto odpowiedzieć na ważne pytanie: w jaki sposób te zmiany wpłyną na kształt arkusza egzaminacyjnego.

Ograniczenie treści programowych spowoduje, że liczba punktów możliwych do uzyskania za bezbłędne rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu na poziomie podstawowym zostanie zmniejszona o 5 punktów. Zmiana dotyczy również proporcji zadań zamkniętych do otwartych. W 2021 roku arkusz będzie zawierał 28 zadań zamkniętych i 7 zadań otwartych. Ponieważ wynik egzaminu będzie, jak dotychczas, podawany w procentach, nie zaburzy to procesu rekrutacyjnego na uczelni. Próg zdawalności na poziomie podstawowym pozostaje bez zmian. W arkuszu przygotowywanym dla poziomu rozszerzonego nie będzie zmian w strukturze. Czas przewidziany na rozwiązanie wszystkich zadań, zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym pozostaje niezmienny (to jest odpowiednio 170 i 180 minut). Należy jeszcze wspomnieć o jednej zmianie, która niezwiązana jest bezpośrednio z egzaminem maturalnym z matematyki. Uczeń nie ma obowiązku przystąpienia do egzaminu na poziomie rozszerzonym w 2021 roku.

2.3. Wykaz zmian w podstawie programowej

Poniżej zamieszczono zapisy z podstawy programowej, które zostały usunięte z wymagań egzaminacyjnych na egzaminie maturalnym w 2021 roku. Niektóre zapisy zmodyfikowano oraz opatrzono komentarzem.

Zakres podstawowy:

W dziale 1. – Liczby rzeczywiste

zmodyfikowano wymaganie szczegółowe:

1.5) zdający wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy np. fizyką, chemią, informatyką).

Otrzymano brzmienie:

wykorzystuje podstawowe własności potęg.

Komentarz:

Decyzja o usunięciu z wymagań egzaminacyjnych umiejętności zastosowania matematyki w innych dziedzinach wiedzy podyktowana została między innymi tym, że ta umiejętność wymaga harmonijnego realizowania pojęć z różnych przedmiotów, co trudno uzyskać w warunkach pandemii. Ponadto rozwiązywanie zadań zawierających elementy interdyscyplinarne wymaga zdecydowanego ugruntowania wiedzy teoretycznej (czysto matematycznej). W pierwszej kolejności uczeń powinien doskonalić stosowanie własności potęg do rozwiązywania problemów czysto matematycznych.

Skreślono wymaganie szczegółowe:

1.70) zdający oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.

Komentarz:

Problematyka związana z przybliżeniami jest szczególnie istotna w tych naukach, w których dużą rolę przykłada się do wykonywania doświadczeń. W szkolnej matematyce przybliżenia są potrzebne w szczególności przy rozwiązywaniu zadań związanych z praktycznym zastosowaniem matematyki. Te treści zostają istotnie ograniczone w tegorocznych wymaganiach egzaminacyjnych, zatem i obliczanie błędów: względnego i bezwzględnego nie jest konieczne w edukacji matematycznej ucznia.

W dziale 3. – Równania i nierówności**skreślono wymaganie szczegółowe:**

3.6) zdający korzysta z definicji pierwiastka trzeciego stopnia do rozwiązywania równań typu $x^3 = -3$.

Komentarz:

Zadania tego typu pojawiały się w ostatnich latach w arkuszach egzaminacyjnych i okazało się, że pomimo pozornej łatwości często sprawiają sporo trudności tym zdającym, którzy ograniczają się do zdawania egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym. Prawdopodobnie ma to związek z błędnym przeświadczeniem o nieistnieniu pierwiastków z liczb ujemnych. Przeświadczenie to ugruntowywane jest poprzez wielokrotne stosowanie twierdzenia Pitagorasa, gdzie przy rozwiązywaniu równań wynikających z niego, automatycznie odrzucane są rozwiązania ujemne.

W dziale 4. – Funkcje**skreślono wymaganie szczegółowe:**

4.11) zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Komentarz:

Rozwiązanie zadania korespondującego z tą umiejętnością wymaga od zdającego solidnego zrozumienia wielu aspektów związanych z funkcją kwadratową i przeanalizowania nieoczywistego zestawu informacji. Ta problematyka bardzo często jest realizowana na sam koniec omawiania funkcji kwadratowej i nie zawsze jest wystarczająco ugruntowana. Ponadto rezygnacja z umieszczenia tego wymagania w zestawie wymagań egzaminacyjnych nie wpływa w istotny sposób na możliwość konstruowania innych zadań związanych z funkcją kwadratową.

Skreślono wymaganie:

4.13) zdający szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a , korzysta z wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Komentarz:

W odróżnieniu od proporcjonalności prostej, proporcjonalność odwrotna oraz szkicowanie wykresów funkcji homograficznych sprawia zdającym egzamin na poziomie podstawowym niemało problemów. Pojęcie proporcjonalności odwrotnej jest mniej intuicyjne i ma mniej oczywistych zastosowań, stąd decyzja o rezygnacji z tego wymagania na egzaminie w 2021 roku.

Skreślono wymagania:

- 4.14) zdający szkicuje wykres funkcji wykładniczych dla różnych podstaw,
4.15) zdający posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Komentarz:

Zjawiska przebiegające w sposób wykładniczy są charakterystyczne dla fizyki, biologii czy chemii (np. rozpad promieniotwórczy czy też rozwój populacji bakterii). Jednak z punktu widzenia matematyki egzaminacyjnej, konstrukcja zadań związanych z tymi treściami jest mocno ograniczona, ponieważ w podstawie programowej nie zostały uwzględnione ani równania ani nierówności wykładnicze. Rezygnacja z nich na egzaminie w 2021 roku nie powinna istotnie rzutować na poziom wiedzy i umiejętności zdającego.

W dziale 6. – Trygonometria**skreślono wymaganie szczegółowe:**

- 6.2) zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych.

Zmodyfikowano wymaganie, rezygnując z fragmentu zapisu:

- 6.3) albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną.

Komentarz:

Obie te zmiany są ułatwieniem dla zdających. Zawężenie umiejętności obliczania miary kąta, gdy dana jest wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta do wielokrotności kątów 30° oraz 45° nie rzutuje w istotny sposób na poziom wiedzy, a zapewne ułatwi przygotowanie się do egzaminu.

W dziale 7. – Planimetria**zmodyfikowano zapis wymagania, skreślając fragment:**

- 7.2) i własności okręgów stycznych.

Komentarz:

Fakt, że promień poprowadzony do punktu styczności jest do prostej stycznej prostopadły jest intuicyjny i znany zdającym. Analiza rozwiązań zadań z ubiegłych egzaminów wskazuje jednak, że własności okręgów stycznych, a w szczególności okręgów stycznych wewnętrznie opanowane są w dużo słabszym stopniu. Można zakładać, że te trudności podczas nauki zdalnej mogą się pogłębiać, stąd rezygnacja z badania tej umiejętności na maturze w 2021 roku.

Zmodyfikowano fragment zapisu wymagania szczegółowego przez usunięcie zapisu w nawiasie:

7.3) (także w kontekstach praktycznych).

Komentarz:

Kontekst praktyczny wymaga od zdającego posiadania umiejętności zbudowania modelu matematycznego odpowiadającego rozważanej sytuacji rzeczywistej. Efektem tego może być sytuacja, że uczeń rozwiązujący zadanie o kontekście praktycznym zna odpowiednie struktury i algorytmy matematyczne, ale przerasta go umiejętność zbudowania właściwego modelu matematycznego.

W dziale 9. – Stereometria

skreślono słowo:

9.1) ostrosłupach,

9.2) ostrosłupach,

skreślono wymagania:

9.4) zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami,

9.6) zdający określa jaką figurą jest przekrój prostopadłościanu płaszczyzną.

Komentarz:

Te cztery zmiany można podsumować wspólnie. Doświadczenia lat ubiegłych jednoznacznie wskazują na to, że zadania ze stereometrii są trudne dla zdających poziom podstawowy. Powód jest taki, że realizowany dział stereometrii jako ostatni w całym cyklu nauczania, nie zostaje odpowiednio utrwalony. Zdający mają kłopot z wyobrażaniem sobie obiektów przestrzennych, w szczególności rozpoznawaniem kątów między płaszczyznami.

Usunięto wymaganie:

9.3) zdający rozpoznaje w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami a płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów.

Komentarz:

Zadania związane z walcami i stożkami tylko pozornie są łatwe. Zadania egzaminacyjne bardzo często wymagały sporej wyobraźni przestrzennej, która w przypadku brył obrotowych z braku czasu i możliwości prezentacji różnych modeli nie została wystarczająco wykształcona.

W dziale 10. – Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka**usunięto wymaganie:**

10.1) zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych.

Komentarz:

Podstawowe pojęcia statystyczne (modalna, mediana i średnia) zostały wprowadzone już w gimnazjum, a uzupełnienie tej listy o średnią ważoną i odchylenie standardowe bez szerokiego omówienia kontekstu praktycznych zastosowań w różnego rodzaju badaniach powoduje, że uczniowie stosują podane wzory mechanicznie. Rezygnacja z tych treści, które w zasadzie sprowadzały się do żmudnych obliczeń bez ich interpretacji nie powinna spowodować negatywnych skutków.

Zakres rozszerzony**W dziale 3. – Równania i nierówności****skreślono wymaganie szczegółowe:**

3.6) zdający rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych.

Komentarz:

Warto zauważyć, że do dyspozycji zdającego pozostają inne możliwości rozwiązywania równań wielomianowych.

W dziale 2. – Wyrażenia algebraiczne

2.1) pozostawiono wymagania związane ze stosowaniem wzorów skróconego mnożenia,

2.3) oraz umiejętnością rozkładu wielomianu na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

W dziale 3. – Równania i nierówności

3.5) zdający ma umieć stosować twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.

W dziale 4. – Funkcje**skreślono umiejętności:**

- 4.2) zdający szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw,
4.3) zdający posługuje się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych chemicznych a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Komentarz:

Funkcja logarytmiczna jest bardzo szczególnym rodzajem funkcji, a wymaganie związane z umiejętnością szkicowania jej wykresu nie jest powiązane z żadnym innym zagadnieniem realizowanym w ciągu edukacji matematycznej w szkole średniej. Sens wprowadzenia tego pojęcia ujawnia się dopiero w korelacji z innymi przedmiotami, co trudno osiągnąć w nauce zdalnej. W szczególności rezygnacja ze sprawdzania tego pojęcia na egzaminie maturalnym w istotny sposób odciąży tych zdających, którzy nie mają planów łączenia swojego dalszego wykształcenia z naukami przyrodniczymi czy np. medycyną.

W dziale 1. – Liczby rzeczywiste**obowiązuje wymaganie:**

- 1.2) zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

W dziale 5. – Ciągi**skreślono wymaganie:**

- 5.1) zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym.

Komentarz:

Rekurencja jest jednym z najważniejszych pojęć związanych nie tylko z ciągami. Wiele fascynujących przykładów w tym ciąg Fibonacciego, zastosowanie rekurencji w równaniach, kombinatoryce itd. może zachęcić wielu uczniów do zauważenia piękna w matematyce. Jednak przeglądając rozkłady materiału dopasowane do różnych programów nauczania można łatwo zauważyć, że na realizację tego niełatwego przecież hasła z podstawy programowej przeznaczone jest bardzo mało czasu. To było wskazówką do podjęcia decyzji o skreśleniu tego hasła z listy wymagań egzaminacyjnych w 2021 roku.

W dziale 6. – Trygonometria

zmodyfikowano wymaganie, usuwając zapis oraz wskazując typ usuniętych nierówności:

- 6.6) i nierówności.

Komentarz:

Większość umiejętności związanych ze szkicowaniem wykresów funkcji została istotnie ograniczona. W nauczaniu zdalnym trudno jest te treści objaśniać. Konsekwentnie zatem, również rozwiązywanie nierówności trygonometrycznych, które w większości odwołuje się do analizy wykresów stosownych funkcji zostało usunięte.

W dziale 7. – Planimetria**skreślono wymaganie:**

7.3) zdający znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta czworokąta itp.).

Zmodyfikowano wymaganie poprzez usunięcie zapisu:

7.4) i jednokładności.

Komentarz:

Jednokładność to szczególny przypadek podobieństwa. Oba te przekształcenia są istotne zarówno w rozwiązywaniu problemów stricte matematycznych, jak i praktycznych. Jednak na IV etapie edukacyjnym praktycznie nie realizuje się zagadnień związanych z konstrukcją obrazów wybranych obiektów geometrycznych, a głównie to odróżnia jednokładność od podobieństwa. Treści programowe związane z twierdzeniem Talesa oraz własnościami figur podobnych wystarczą do rozwiązania większości zadań egzaminacyjnych z tego obszaru, a techniczna umiejętność wyznaczania obrazów figur w jednokładności nie jest kluczowa dla innych działów matematyki.

W dziale 8. – Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej**skreślono wymaganie:**

8.1) zdający interpretuje graficznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności.

Komentarz:

Kolejna, konsekwentna decyzja związana z ograniczeniem treści dotyczących interpretacji graficznych w zakresie, który nie będzie skutkował negatywnie w realizacji innych treści.

Skreślono wymagania:

8.2) zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych,

8.3) zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt.

Komentarz:

Oba te wymagania korespondują z analogicznymi umiejętnościami na poziomie podstawowym, gdzie wymagania szczegółowe dotyczą wyznaczanie równań prostych równoległych i prostopadłych przedstawionych w postaci kierunkowej. Ponieważ rozwiązując zadania związane z tym hasłem programowym zdający wykonuje praktycznie te same czynności, wymaganie umiejętności innego zapisu tych działań nie jest konieczne.

W dziale 9. – Stereometria

skreślono wymaganie:

9.1) zdający określa jaki jest przekrój sfery płaszczyzną.

Komentarz:

To hasło programów w praktyce nigdy nie znalazło swojego odzwierciedlenie w praktyce egzaminacyjnej. Ze względu na trywialny zbiór odpowiedzi na pytanie czym jest część wspólna sfery i płaszczyzny (zbiór pusty, punkt lub okrąg) rezygnacja z tego wymagania egzaminacyjnego nie wpłynie na konstrukcję arkusza, a ograniczy spektrum przygotowań do egzaminu.

Zmodyfikowano wymaganie poprzez usunięcie z niego zapisu:

9.2) lub ostrosłupa.

Komentarz:

To konsekwencja rezygnacji z analizowania problemów związanych z kątami i płaszczyznami w ostrosłupach na poziomie podstawowym. Trzeba przecież pamiętać, że zdający poziom rozszerzony przystępują do egzaminu również na poziomie podstawowym, a brak realizacji lub powtarzania i ugruntowywania części treści na tym poziomie skutkuje problemami na poziomie rozszerzonym.

W dziale 10. – Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

zmodyfikowano wymaganie poprzez usunięcie zapisu:

10.1) w bardziej złożonych.

Komentarz:

Zadania wymagające zastosowania zaawansowanych rozumowań kombinatorycznych są dla zdających trudne, co pokazuje analiza rozwiązań

w arkuszach egzaminacyjnych absolwentów z lat ubiegłych. Usunięcie z listy wymagań skomplikowanych zadań kombinatorycznych to kolejny krok wskazujący na zrozumienie trudności uczniów przygotowujących się do egzaminu na poziomie rozszerzonym w warunkach pandemii. Dla uniknięcia nieporozumień wskazanym wydaje się uszczegółowienie tego wymagania poprzez podanie odpowiednich przykładów w aneksie do Informatora maturalnego, którego wydanie planowane jest przez CKE.

W dziale 11. – Rachunek różniczkowy

zmodyfikowano zapis wymagania poprzez rezygnację z zapisu:

11.3) i fizycznej.

Komentarz:

Interpretacja fizyczna pochodnej odwołuje się do znajomości praw fizyki. Przy nauczaniu zdalnym trudno o korelację międzyprzedmiotową, dlatego uważa się, że znajomość interpretacji geometrycznej pochodnej już wystarczająco świadczy o zaawansowaniu matematycznym ucznia.

2.4. Omówienie zadań z arkuszy egzaminacyjnych

Jednym ze sposobów sprawdzenia czy dobrze zostały zrozumiane zapisy rozporządzenia wprowadzającego zmiany w wymaganiach egzaminacyjnych, może być analiza arkuszy egzaminacyjnych z ubiegłych lat. Pozwoli ona określić, które z zadań należałoby z tych arkuszy usunąć bądź zmodyfikować, tak aby odpowiadały wymaganiom na egzaminie maturalnym w 2021 roku. Jest to jednocześnie wskazówka w jaki sposób należy realizować w praktyce część zajęć.

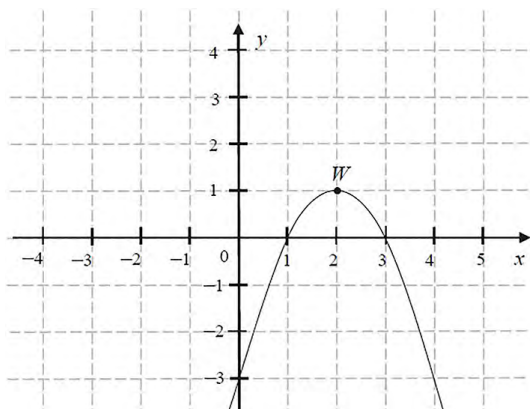
Poniżej przedstawiono analizę zadań – zarówno w części podstawowej, jak i rozszerzonej – które znalazły się w arkuszu egzaminacyjnym przygotowanym na egzamin maturalny w 2020 roku.

Pierwszą propozycją jest selekcja tych zadań, których klasyfikacja jako „dopuszczonych do egzaminu” stała się problematyczna. Poniżej przedstawione zostały wybrane zadania i sporządzony został stosowny komentarz związany z teoretyczną możliwością użycia tych zadań na egzaminie maturalnym w 2021 roku.

Poziom podstawowy

Informacja do zadań 7.–9.

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = a(x-1)(x-3)$. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem tej funkcji. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (2, 1)$.



Zadanie 8. (0–1)

Największa wartość funkcji f w przedziale $(1, 4)$ jest równa

- A. -3 B. 0 C. 1 D. 2

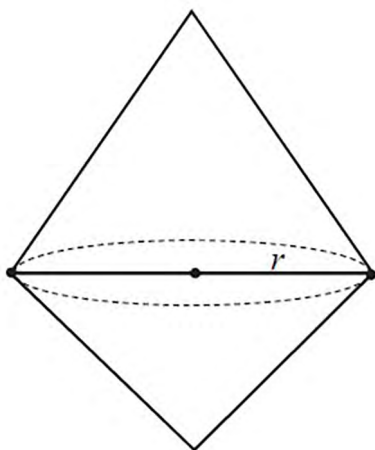
Zadanie 12. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 4^{-x} + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Liczba $f\left(\frac{1}{2}\right)$ jest równa

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 17

Zadanie 25. (0–1)

Dwa stożki o takich samych podstawach połączono podstawami w taki sposób, jak na rysunku. Stosunek wysokości tych stożków jest równy 3:2. Objętość stożka o krótszej wysokości jest równa 12 cm^3 .

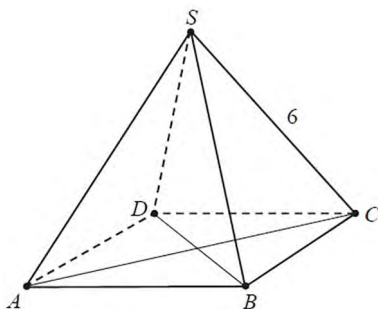


Objętość bryły utworzonej z połączonych stożków jest równa

- A. 20 cm^3 B. 30 cm^3 C. 39 cm^3 D. $52,5 \text{ cm}^3$

Zadanie 34.

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$, którego krawędź boczna ma długość 6 (zobacz rysunek). Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem którego tangens jest równy $\sqrt{7}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Wyselekcjonowane zostały zatem cztery zadania, w których dokonano analizy treści.

Treść pierwszego z wybranych zadań (zad. 8) koresponduje z usuniętym wymaganiem szczegółowym 4.11) „zadający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym”. Związek jest jednak tylko pozorny. W usuniętym wymaganiu wyraźnie wyeksponowana jest czynność, którą zdający powinien umieć wykonywać. Miał on wyznaczać odpowiednią wartość funkcji kwadratowej. Oznacza to, że egzaminator, oceniając rozwiązanie zadania, oczekuje wykonania stosownych obliczeń. Są to na przykład: obliczenie współrzędnej wierzchołka paraboli, która jest wykresem podanej funkcji kwadratowej, sprawdzenie

czy otrzymana liczba należy do przedziału, w którym szukana jest wartość najmniejsza lub największa i w zależności od efektu tych działań obliczenie drugiej współrzędnej wierzchołka lub wartości podanej funkcji, na jednym z krańców danego przedziału. W zadaniu 8. oczekujemy tylko odczytania z podanego wykresu funkcji największej wartości jaką ta funkcja przyjmuje. Posiadanie tej umiejętności wynika z zapisu wymagania 6.3) „zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą)”. Podsumowując zadanie o podobnej treści do zadania 8. należy stwierdzić, że mogłoby się znaleźć w arkuszu egzaminacyjnym w 2021 roku.

Drugie z wybranych zadań (zad. 12) jest związane z funkcją wykładniczą. Zostało wybrane, ponieważ usunięte z zestawu wymagań szczegółowych zostało wymaganie 4.14) „zdający szkicuje wykres funkcji wykładniczych dla różnych podstaw” oraz łączące się z nim wymaganie 4.15) „zdający posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym”. Czy to powoduje, że zadanie związane z obliczaniem wartości funkcji wykładniczej nie może być przedmiotem zadania egzaminacyjnego? Otóż – może. Aby obliczyć tę wartość – zdający nie musi rysować wykresu funkcji wykładniczej. Mało tego – nawet nie musi wiedzieć jak ten wykres wygląda. Jeżeli mielibyśmy obliczyć wartość funkcji np. $f(x) = \frac{\sin x}{(x^2 + 7x - 1)^3}$ dla $x = 0$ nie będziemy się nawet zastanawiać jak wygląda wykres tej funkcji, tylko obliczymy $f(0) = 0$. Gdyby jednak to nie rozwiązało do końca wątpliwości wystarczy odwołać się do zapisu wymagania 4.2) „zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość”.

Kolejne zadanie (zad. 25) jest związane z bryłami obrotowymi. Również tym razem ocena zgodności tego zadania z wymaganiami szczegółowymi obowiązującymi w 2021 roku nie jest oczywista. Skreślony został zapis wymagania 9.3) „*zdający rozpoznaje w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami a płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów*”. Jednak problem postawiony przed zdającym w zadaniu 25. nie ma bezpośredniego związku z kątami w walcach i stożkach, o których mowa w cytowanym zapisie. Powtórna lektura wszystkich wymagań szczegółowych nie daje żadnej wskazówki, ponieważ nigdzie więcej o bryłach obrotowych nie ma mowy. Trzeba w takiej sytuacji odnieść się do wymagań egzaminacyjnych wynikających ze zmian podstawy programowej dla III etapu edukacji. Obowiązuje przecież reguła kumulatywności treści z kolejnych etapów kształcenia. Otóż w tych zapisach znajdujemy tylko:

11. Bryły. Zdający:

- 1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe;
- 2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego i ostrosłupa.

Oznacza to, że na żadnym etapie w wymaganiach egzaminacyjnych, zatem i w zadaniach egzaminacyjnych bryły obrotowe nie znajdują się.

Jednocześnie przeprowadzona analiza udziela odpowiedzi na naturalnie pojawiające się pytanie: czy w związku ze zmianą w zapisie wymagań 9.1) i 9.2), w których wykreślono słowo „ostrosłupach”, ponadto skreślono wymaganie 9.4) „zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami”, zadań z ostrosłupami na egzaminie maturalnym być nie może? Ponieważ w wymaganiach dla III etapu edukacyjnego zapisane zostały wymagania związane z rozpoznawaniem ostrosłupów i obliczaniem ich pól powierzchni i objętości, to również na IV etapie te wymagania obowiązują. Należy jednak zwrócić uwagę, że zakres tych wymagań nie może przekroczyć cytowanych wyżej zapisów.

Ostatnie z wybranych zadań (zad. 34) jest najmniej kontrowersyjne w kontekście jego dopasowania do wymagań egzaminacyjnych w 2021 roku. Pierwsze zdanie i polecenie: „Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$, którego krawędź boczna ma długość 6 (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa” w świetle powyższych wyjaśnień wpisują się w wymagania z III etapu edukacyjnego. Jednak najważniejsza, środkowa część treści zadania, ta, z której wynikają najważniejsze informacje dotyczące omawianego ostrosłupa czyli: „Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $\sqrt{7}$ ” – powoduje, że takie zadanie nie mogłoby się znaleźć na egzaminie maturalnym. Umiejętności potrzebne do rozwiązania tego zadania wynikają bowiem bezpośrednio ze skreślonego wymagania 9.4) „*zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami*”.

W podobny sposób przeanalizujemy zadania z arkusza przygotowanego dla poziomu rozszerzonego. Pierwszym krokiem jest wstępna selekcja zadań.

Wątpliwości mogą budzić zadania:

Zadanie 12. (0–5)

Prosta o równaniu $x + y - 10 = 0$ przecina okrąg o równaniu

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0 \text{ w punktach } K \text{ i } L. \text{ Punkt } S \text{ jest środkiem cięciwy } KL.$$

Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$.

Zadanie 13. (0–4)

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

Zadanie 14. (0–6)

Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCD S$ jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Ramiona tego trapezu mają długości $|AD| = 10$ i $|BC| = 16$, a miara kąta ABC jest równa 30° . Każda ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α , taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{2}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przeanalizujemy kolejno treści tych trzech zadań.

Już pierwsze zdanie w zadaniu 12. powinno przez moment nas zastanowić. Zapis: „Prosta o równaniu $x + y - 10 = 0$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$ w punktach K i L” zawiera równanie prostej w postaci ogólnej. Wykreślone z wymagań szczegółowych zapisy 8.2) „*zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych*” oraz 8.3) „*zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt*” wydawać by się mogło, że korespondują z zapisem równania prostej $x + y - 10 = 0$. Jest to przecież równanie w postaci ogólnej. Jednak uważna lektura zapisu wykreślonych wymagań prowadzi do wniosku, że chodzi w nich tylko o umiejętność **interpretowania prostopadłości** lub **równoległości** prostych danych równaniami ogólnymi, a nie samych równań ogólnych prostych. Potwierdza to tekst wymagania 8.1) dla poziomego podstawowego „*zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej)*”. Powyższe zadanie nie mogłoby być zmieszczone w arkuszu egzaminacyjnym w 2021 roku, ponieważ polecenie w tym zadaniu: „Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ ” bezpośrednio jest związane ze zmodyfikowanym wymaganiem 7.4, z którego usunięto właśnie jednokładność.

Rozstrzygnięcie, czy zadanie 13. odpowiada wymaganiom przygotowanym dla zdających egzamin maturalny w 2021 roku – nie jest oczywiste. Poprzez usunięcie zapisu „*w bardziej złożonych*” w wymaganiu 10.1) – intencją było wybranie takiego zadania z kombinatoryki, którego rozwiązanie nie wymaga jednoczesnego stosowania różnego rodzaju narzędzi kombinatorycznych. Wydaje się, że omawiane zadanie nie spełnia tego warunku. W rozwiązaniu trzeba rozpatrywać przypadki, zadbać o ich rozłączność, a w każdym z nich stosować zarówno kombinacje, jak i wariacje z powtórzeniami, a na koniec bezbłędnie zebrać wszystkie informacje. Trzeba jednak mieć świadomość, że zawsze zapis typu – „*bardziej złożony*” bez objaśnienia, co przez taki zapis się rozumie, w szczególności poprzez podanie przynajmniej kilku przykładów, zawsze będzie budził kontrowersje.

I na zakończenie zadanie 14. Tu sprawa jest oczywista. Zapisy wymagań szczegółowych na poziomie rozszerzonym, na poziomie podstawowym oraz na niższych etapach edukacji – nie obejmują pojęć związanych z kątami między ścianami w ostrosłupach. Zadania, w których występują takie treści, nie mogą być zamieszczone w arkuszu egzaminacyjnym przeznaczonym dla maturzystów w 2021 roku.

Podsumowanie

Mam nadzieję, że dokonana analiza wymagań egzaminacyjnych i przykładowych zadań z umieszczonymi do nich komentarzami pomoże w przygotowaniu ucznia do egzaminu maturalnego. Warto również zapoznać się z pojawiającymi komunikatami na stronach MEiN, CKE i ORE. W szczególności zachęcam do uważnej analizy aneksu do Informatora maturalnego, który ma zostać opublikowany na stronie internetowej CKE. Wszystkim nam przecież bardzo zależy na efektywnym przygotowaniu nauczycieli oraz uczniów do wyzwań, które stawia egzamin maturalny przeprowadzany w czasie pandemii.

