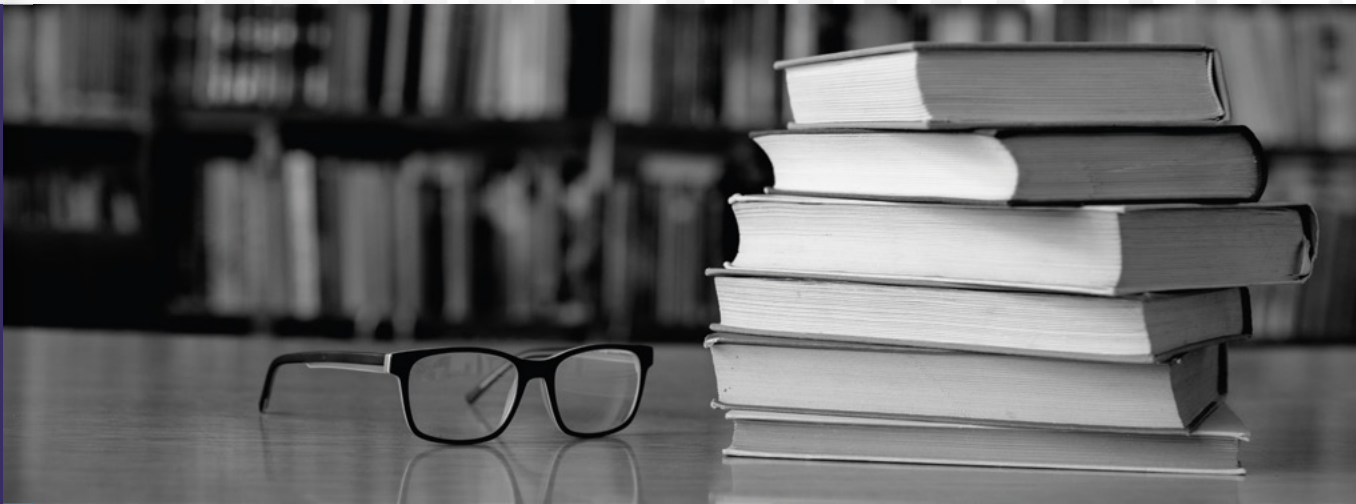
Vademecum Nauczyciela

Wdrażanie podstawy programowej w szkole ponadpodstawowej



MATEMATYKA

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

Vademecum Nauczyciela

Wdrażanie podstawy programowej w szkole ponadpodstawowej

MATEMATYKA

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Warszawa 2019

Autorzy
Maciej Borodzik, Michał Krych, Regina Pruszyńska

Redakcja merytoryczna
Roman Wosiek, Danuta Pyrek, Andrzej Lenarcik

Redakcja językowa i korekta
Katarzyna Majewska

Redakcja techniczna i skład
Wojciech Romerowicz

Projekt okładki, layout
Wojciech Romerowicz

Elementy graficzne: © Jovan/stock.adobe.com, © Pushkarevskyy/stock.adobe.com, © absent84/stock.adobe.com, © Julien Eichinger/Fotolia.com, © LynxVector/Fotolia.com

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Warszawa 2019

ISBN 978-83-66047-51-8
ISBN 978-83-66047-49-5 (seria *Vademecum nauczyciela. Wdrażanie podstawy programowej w szkole ponadpodstawowej*)

© Copyright by Ministerstwo Edukacji Narodowej

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl
tel. 22 345 37 00

Opracowano na podstawie materiałów przygotowanych przez Ministerstwo Edukacji Narodowej

Spis treści

Wprowadzenie

Przygotowaliśmy dla Państwa publikację, której celem jest przybliżenie najważniejszych założeń reformy edukacji w liceum ogólnokształcącym oraz technikum[1]. Wprowadzone zmiany wydłużyły czas nauki w liceum do 4 lat, a w technikum – do 5. Oprócz modyfikacji strukturalnych została wprowadzona także zmiana programowa, której najważniejszym celem jest odejście od wąskoutylitarnego, pragmatycznego kształcenia umiejętności na rzecz powrotu do uporządkowanej, systematycznej wiedzy jako podstawy edukacji – *traktowanie uporządkowanej, systematycznej wiedzy jako podstawy kształtowania umiejętności* (cel 1.) oraz *rozwijanie u uczniów szacunku dla wiedzy* (cel 8.). Zdaniem Stanleya J. Spanbauera naczelną wartość edukacji stanowi jasna, klarowna i uporządkowana wiedza. „Ona, zmieniając człowieka, ustawia go w coraz to innych szeregach. Jest odniesieniem do pragnień niechwilowych i ponadto widzianych przez pryzmat osobniczych wartości. Jest wartością w kształceniu jednostki i jej własnością. O tym, jak ważną odgrywa rolę, jednostka dowiaduje się najczęściej wtedy, gdy podejmowanie decyzji uwarunkowane jest jej posiadaniem"[2].

W nowej podstawie programowej umiejętności i kompetencje rozumiane są zatem jako praktyczne zastosowanie **wiedzy** zdobywanej przez uczniów w procesie kształcenia. Wiedza to informacja wartościowa, integrująca dane, fakty, hipotezy; oznacza ona umiejętność zdobywania i posiadania informacji oraz wykorzystywania ich w praktyce. Tworzenie wiedzy wymaga, aby ktoś wcześniej informację przetworzył, połączył i zinterpretował[3]. Wiedza nie jest zatem synonimem informacji – wręcz przeciwnie: wiedzę tworzą informacje uporządkowane, zhierarchizowane i logicznie powiązane.

Cele główne nowej podstawy programowej – sformułowane w oparciu o wyżej wspomnianą koncepcję wiedzy – kładą szczególny nacisk na zadania poznawcze w obrębie szkolnej edukacji, które realizowane są w dwóch wymiarach: z jednej strony jako transmisja niezbędnej wiedzy przedmiotowej, z drugiej – jako podstawa kształcenia umiejętności. Rola szkoły nie polega tylko na zapewnieniu dostępu do informacji – ten dostęp w czasach cywilizacji informatycznej i cyfrowej, jak nazywany jest wiek XXI, wydaje się dla uczniów niemal nieograniczony – ale taka organizacja złożonego procesu

[1] *Vademecum Nauczyciela* zawiera zapisy podstawy programowej z komentarzami dotyczące wyłącznie liceum ogólnokształcącego oraz technikum. Pełną wersję podstawy programowej kształcenia ogólnego można znaleźć na stronie Ośrodka Rozwoju Edukacji: https://www.ore.edu.pl/2018/03/podstawa-programowa-ksztalcenia-ogolnego-dla-liceum-technikum-i-branzowej-szkoly-ii-stopnia/ [dostęp: 15 lipca 2019 r.].

[2] Spanbauer S. J., (1987), *Quality First in Education... Why not?*, Appleton, WI: Fox Valley Technical College Foundation, za: Denek K., *Edukacja oparta o wartości*, (2009), „Wartości w muzyce" nr 2, s. 139–158, online: http://bazhum.muzhp.pl/media//files/Wartosci_w_muzyce/Wartosci_w_muzyce-r2009-t2/Wartosci_w_muzyce-r2009-t2-s139-158/Wartosci_w_muzyce-r2009-t2-s139-158.pdf [dostęp: 15 lipca 2019 r.].

[3] Kromer B., (2008), *Wiedza jako podstawowy czynnik funkcjonowania organizacji inteligentnej*, „Zeszyty Naukowe Instytutu Ekonomii i Zarządzania" nr 2, Koszalin: Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, s. 93–99.

przekazywania i samodzielnego zdobywania wiedzy, aby młodzi ludzie mogli rozumieć otaczającą ich rzeczywistość. Nastąpiła więc zmiana paradygmatu myślenia o edukacji – szkoła staje się przestrzenią rozwoju uczniów i budowania dla nich dobrej przyszłości, w której wykorzystają swój potencjał, możliwości i zainteresowania.

Nowa podstawa programowa do szkoły ponadpodstawowej ukierunkowana jest na rozwijanie myślenia. Myślenie to tworzenie pojęć, które organizują świat, rozwiązywanie problemów oraz skuteczne podejmowanie decyzji i formułowanie sądów[4]. Myślenie krytyczne stanowi jedną z najważniejszych umiejętności XXI wieku, a jej rozwój jest kluczowym elementem przygotowującym uczniów do dorosłego życia. Dzięki myśleniu krytycznemu ludzie uczą się i potrafią:

- analizować, tworzyć hipotezy, określać istotę problemów;
- oceniać, weryfikować i formułować argumenty;
- myśleć niezależnie;
- tworzyć logiczne powiązania;
- przewidywać (na drodze dedukcji) konsekwencje znanych faktów;
- dostrzegać nieścisłości i błędy w rozumowaniu;
- sprawdzać fakty, rozumieć logiczne zależności między faktami;
- przetwarzać informacje;
- kwestionować oczywistości i własne założenia;
- myśleć jasno i precyzyjnie, być dociekliwymi.

Myślenie krytyczne jest zdyscyplinowanym procesem intelektualnym, który polega na:

1) aktywnej i umiejętnej konceptualizacji;
2) wykorzystywaniu, analizowaniu i syntetyzowaniu oraz ocenie informacji uzyskanych od kogoś lub sformułowanych samodzielnie;
3) obserwacji, zdobywaniu doświadczeń;
4) refleksji, rozumowaniu i komunikacji.

Krytyczne myślenie zakłada sprawdzenie w każdym rozumowaniu struktur lub elementów takich jak: cel, problem, kwestia, założenia, pojęcia, podstawy empiryczne, określony wniosek, implikacje i konsekwencje, zastrzeżenia płynące z innych punktów widzenia oraz zakres możliwych nawiązań. Myślenie krytyczne jako dotyczące wielu różnych przedmiotów, spraw i celów stanowi składową różnorodnych sposobów myślenia, m.in.: myślenia naukowego, matematycznego, historycznego, ekonomicznego, moralnego i filozoficznego.

[4] Myers D.G., *Psychologia*, (2003), Poznań: Zysk i S-ka, s. 378.

Myślenie krytyczne można charakteryzować jako złożone z następujących elementów:
1) zbiór informacji oraz przekonań, które kształtują umiejętności;
2) nawyki, oparte na zaangażowaniu intelektualnym, określające wykorzystanie owych umiejętności do kontroli i kształtowania zachowania.

Z tego względu można je przeciwstawić:
1) biernemu przyswajaniu i przechowywaniu informacji – ponieważ myślenie krytyczne wymaga [używania] szczegółowych metod wyszukiwania informacji i obchodzenia się z nimi;
2) posiadaniu umiejętności, które zgodnie z założeniem będą stale używane;
3) wykorzystywaniu tych umiejętności[5].

Autorzy nowej podstawy programowej, rozumiejąc potrzebę formowania „człowieka myślącego", aż trzy z ośmiu celów głównych odnieśli do konieczności ukształtowania i doskonalenia – w ramach nauczania na zajęciach wszystkich przedmiotów ogólnych, realizowanych zarówno w liceum ogólnokształcącym, jak i w technikum – narzędzi intelektualnego rozwoju człowieka. Za istotne wyzwania, przed którymi stoi szkoła, uznano:

2) doskonalenie umiejętności myślowo-językowych, takich jak: czytanie ze zrozumieniem, pisanie twórcze, formułowanie pytań i problemów, posługiwanie się kryteriami, uzasadnianie, wyjaśnianie, klasyfikowanie, wnioskowanie, definiowanie, posługiwanie się przykładami itp.;
4) zdobywanie umiejętności formułowania samodzielnych i przemyślanych sądów, uzasadniania własnych i cudzych sądów w procesie dialogu we wspólnocie dociekającej;
5) łączenie zdolności krytycznego i logicznego myślenia z umiejętnościami wyobrażeniowo-twórczymi;
7) rozwijanie narzędzi myślowych umożliwiających uczniom obcowanie z kulturą i jej rozumienie.

Myślenie stanowi nadrzędną **umiejętność** zdobywaną przez ucznia w trakcie szkolnej edukacji – jest „rozumiane jako złożony proces umysłowy, polegający na tworzeniu nowych reprezentacji za pomocą transformacji dostępnych informacji, obejmującej interakcję wielu operacji umysłowych: wnioskowanie, abstrahowanie, rozumowanie, wyobrażanie sobie, sądzenie, rozwiązywanie problemów, twórczość. Dzięki temu, że uczniowie szkoły ponadpodstawowej uczą się równocześnie różnych przedmiotów, możliwe jest rozwijanie następujących typów myślenia: analitycznego, syntetycznego, logicznego, komputacyjnego, przyczynowo-skutkowego, kreatywnego, abstrakcyjnego; zachowanie ciągłości kształcenia ogólnego rozwija zarówno myślenie percepcyjne, jak i myślenie pojęciowe. Synteza obu typów myślenia stanowi podstawę wszechstronnego rozwoju ucznia".

---
[5] Zob. *Oświadczenie Michaela Scrivena i Richarda Paula wygłoszone podczas 8th Annual International Conference on Critical Thinking and Education Reform*, (1987) – online: http://www.criticalthinking.pl/czym-jest-krytyczne-myslenie/ [dostęp: 15 lipca 2019 r.].

Przygotowany dla Państwa materiał proponuje sposoby, metody i techniki, które pomagają rozwijać sprawność myślenia uczniów na lekcjach poszczególnych przedmiotów. Podpowiada rozwiązania metodyczne i – mamy nadzieję – okaże się ciekawym, inspirującym i pomocnym poradnikiem w pracy dydaktycznej.

dr Wioletta Kozak

Preambuła podstawy programowej kształcenia ogólnego

III etap edukacyjny: 4-letnie liceum ogólnokształcące oraz 5-letnie technikum

Kształcenie ogólne w szkole ponadpodstawowej tworzy programowo spójną całość i stanowi fundament wykształcenia, umożliwiający zdobycie zróżnicowanych kwalifikacji zawodowych, a następnie ich doskonalenie lub modyfikowanie, otwierając proces uczenia się przez całe życie.

Celem kształcenia ogólnego w liceum ogólnokształcącym i technikum jest:

1) traktowanie uporządkowanej, systematycznej wiedzy jako podstawy kształtowania umiejętności;
2) doskonalenie umiejętności myślowo-językowych, takich jak: czytanie ze zrozumieniem, pisanie twórcze, formułowanie pytań i problemów, posługiwanie się kryteriami, uzasadnianie, wyjaśnianie, klasyfikowanie, wnioskowanie, definiowanie, posługiwanie się przykładami itp.;
3) rozwijanie osobistych zainteresowań ucznia i integrowanie wiedzy przedmiotowej z różnych dyscyplin;
4) zdobywanie umiejętności formułowania samodzielnych i przemyślanych sądów, uzasadniania własnych i cudzych sądów w procesie dialogu we wspólnocie dociekającej;
5) łączenie zdolności krytycznego i logicznego myślenia z umiejętnościami wyobrażeniowo-twórczymi;
6) rozwijanie wrażliwości społecznej, moralnej i estetycznej;
7) rozwijanie narzędzi myślowych umożliwiających uczniom obcowanie z kulturą i jej rozumienie;
8) rozwijanie u uczniów szacunku dla wiedzy, wyrabianie pasji poznawania świata i zachęcanie do praktycznego zastosowania zdobytych wiadomości.

Do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego w liceum ogólnokształcącym i technikum należą:

1) myślenie – rozumiane jako złożony proces umysłowy, polegający na tworzeniu nowych reprezentacji za pomocą transformacji dostępnych informacji, obejmującej interakcję wielu operacji umysłowych: wnioskowanie, abstrahowanie, rozumowanie, wyobrażanie sobie, sądzenie, rozwiązywanie problemów, twórczość. Dzięki temu, że uczniowie szkoły ponadpodstawowej uczą się równocześnie różnych przedmiotów, możliwe jest rozwijanie następujących typów myślenia: analitycznego, syntetycznego, logicznego, komputacyjnego, przyczynowo-skutkowego, kreatywnego, abstrakcyjnego; zachowanie ciągłości kształcenia ogólnego rozwija zarówno myślenie percepcyjne, jak i myślenie pojęciowe. Synteza obu typów myślenia stanowi podstawę wszechstronnego rozwoju ucznia;

2) czytanie – umiejętność łącząca zarówno rozumienie sensów, jak i znaczeń symbolicznych wypowiedzi; kluczowa umiejętność lingwistyczna i psychologiczna prowadząca do rozwoju osobowego, aktywnego uczestnictwa we wspólnocie, przekazywania doświadczeń między pokoleniami;
3) umiejętność komunikowania się w języku ojczystym i w językach obcych, zarówno w mowie, jak i w piśmie, to podstawowa umiejętność społeczna, której podstawą jest znajomość norm językowych oraz tworzenie podstaw porozumienia się w różnych sytuacjach komunikacyjnych;
4) kreatywne rozwiązywanie problemów z różnych dziedzin ze świadomym wykorzystaniem metod i narzędzi wywodzących się z informatyki, w tym programowanie;
5) umiejętność sprawnego posługiwania się nowoczesnymi technologiami informacyjno-komunikacyjnymi, w tym dbałość o poszanowanie praw autorskich i bezpieczne poruszanie się w cyberprzestrzeni;
6) umiejętność samodzielnego docierania do informacji, dokonywania ich selekcji, syntezy oraz wartościowania, rzetelnego korzystania ze źródeł;
7) nabywanie nawyków systematycznego uczenia się, porządkowania zdobytej wiedzy i jej pogłębiania;
8) umiejętność współpracy w grupie i podejmowania działań indywidualnych.

Jednym z najważniejszych zadań liceum ogólnokształcącego i technikum jest rozwijanie kompetencji językowej i kompetencji komunikacyjnej stanowiących kluczowe narzędzie poznawcze we wszystkich dyscyplinach wiedzy. Istotne w tym zakresie jest łączenie teorii i praktyki językowej. Bogacenie słownictwa, w tym poznawanie terminologii właściwej dla każdego z przedmiotów, służy rozwojowi intelektualnemu ucznia, a wspomaganie i dbałość o ten rozwój należy do obowiązków każdego nauczyciela.

Ważnym zadaniem szkoły jest przygotowanie uczniów do życia w społeczeństwie informacyjnym. Nauczyciele wszystkich przedmiotów powinni stwarzać uczniom warunki do nabywania umiejętności wyszukiwania, porządkowania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł oraz dokumentowania swojej pracy, z uwzględnieniem prawidłowej kompozycji tekstu i zasad jego organizacji, z zastosowaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych.

Realizację powyższych celów powinna wspomagać dobrze wyposażona biblioteka szkolna, dysponująca aktualnymi zbiorami, zarówno w postaci księgozbioru, jak i w postaci zasobów multimedialnych. Nauczyciele wszystkich przedmiotów powinni odwoływać się do zasobów biblioteki szkolnej i współpracować z nauczycielami bibliotekarzami w celu wszechstronnego przygotowania uczniów do samokształcenia i świadomego wyszukiwania, selekcjonowania i wykorzystywania informacji.

Ponieważ środki społecznego przekazu odgrywają coraz większą rolę, zarówno w życiu społecznym, jak i indywidualnym, każdy nauczyciel powinien poświęcić dużo uwagi edukacji medialnej, czyli wychowaniu uczniów do właściwego odbioru i wykorzystania mediów.

Ważnym celem działalności szkoły jest skuteczne nauczanie języków obcych. Bardzo ważne jest dostosowanie zajęć do poziomu przygotowania ucznia, które uzyskał na wcześniejszych etapach edukacyjnych.

Ważnym zadaniem szkoły jest także edukacja zdrowotna, której celem jest rozwijanie u uczniów postawy dbałości o zdrowie własne i innych ludzi oraz umiejętności tworzenia środowiska sprzyjającego zdrowiu.

W procesie kształcenia ogólnego szkoła kształtuje u uczniów postawy sprzyjające ich dalszemu rozwojowi indywidualnemu i społecznemu, takie jak: uczciwość, wiarygodność, odpowiedzialność, wytrwałość, poczucie własnej wartości, szacunek dla innych ludzi, ciekawość poznawcza, kreatywność, przedsiębiorczość, kultura osobista, gotowość do uczestnictwa w kulturze, podejmowania inicjatyw oraz do pracy zespołowej. W rozwoju społecznym bardzo ważne jest kształtowanie postawy obywatelskiej, postawy poszanowania tradycji i kultury własnego narodu, a także postawy poszanowania dla innych kultur i tradycji.

Kształcenie i wychowanie w liceum ogólnokształcącym i technikum sprzyja rozwijaniu postaw obywatelskich, patriotycznych i społecznych uczniów. Zadaniem szkoły jest wzmacnianie poczucia tożsamości narodowej, etnicznej i regionalnej, przywiązania do historii i tradycji narodowych, przygotowanie i zachęcanie do podejmowania działań na rzecz środowiska szkolnego i lokalnego, w tym do angażowania się w wolontariat. Szkoła dba o wychowanie młodzieży w duchu akceptacji i szacunku dla drugiego człowieka, kształtuje postawę szacunku dla środowiska przyrodniczego, motywuje do działań na rzecz ochrony środowiska oraz rozwija zainteresowanie ekologią.

Duże znaczenie dla rozwoju młodego człowieka oraz jego sukcesów w dorosłym życiu ma nabywanie kompetencji społecznych, takich jak: komunikacja i współpraca w grupie, w tym w środowiskach wirtualnych, udział w projektach zespołowych lub indywidualnych oraz organizacja i zarządzanie projektami.

Strategia uczenia się przez całe życie wymaga umiejętności podejmowania ważnych decyzji, poczynając od wyboru szkoły ponadpodstawowej, kierunku studiów lub konkretnej specjalizacji zawodowej, poprzez decyzje o wyborze miejsca pracy, sposobie podnoszenia oraz poszerzania swoich kwalifikacji, aż do ewentualnych decyzji o zmianie zawodu. I te umiejętności kształtowane będą w szkole ponadpodstawowej.

Przedmioty w liceum ogólnokształcącym i technikum mogą być nauczane w zakresie podstawowym lub w zakresie rozszerzonym:

1) tylko w zakresie podstawowym – przedmioty: muzyka, plastyka, podstawy przedsiębiorczości, wychowanie fizyczne, edukacja dla bezpieczeństwa, wychowanie do życia w rodzinie, etyka;
2) w zakresie podstawowym i w zakresie rozszerzonym: język polski, język obcy nowożytny, matematyka, język mniejszości narodowej lub etnicznej oraz język regionalny – język kaszubski, historia, wiedza o społeczeństwie, geografia, biologia, chemia, filozofia, fizyka, informatyka;
3) tylko w zakresie rozszerzonym – przedmioty: historia muzyki, historia sztuki, język łaciński i kultura antyczna.

Szkoła ma stwarzać uczniom warunki do nabywania wiedzy i umiejętności potrzebnych do rozwiązywania problemów z wykorzystaniem metod i technik wywodzących się z informatyki, w tym logicznego i algorytmicznego myślenia, programowania, posługiwania się aplikacjami komputerowymi, wyszukiwania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł, posługiwania się komputerem i podstawowymi urządzeniami cyfrowymi oraz stosowania tych umiejętności na zajęciach z różnych przedmiotów, m.in. do pracy nad tekstem, wykonywania obliczeń, przetwarzania informacji i jej prezentacji w różnych postaciach.

Każda sala lekcyjna powinna mieć dostęp do internetu, uczniowie i nauczyciele powinni mieć zapewniony dostęp do pracowni stacjonarnej lub mobilnej oraz możliwość korzystania z własnego sprzętu. Wszystkie pracownie powinny być wyposażone w monitor interaktywny (z wbudowanym komputerem i oprogramowaniem) lub zestaw: komputer, projektor i tablica interaktywna lub ekran.

Szkoła ma również przygotowywać uczniów do dokonywania świadomych i odpowiedzialnych wyborów w trakcie korzystania z zasobów dostępnych w internecie, krytycznej analizy informacji, bezpiecznego poruszania się w przestrzeni cyfrowej, w tym nawiązywania i utrzymywania opartych na wzajemnym szacunku relacji z innymi użytkownikami sieci.

Szkoła oraz poszczególni nauczyciele podejmują działania mające na celu zindywidualizowane wspomaganie rozwoju każdego ucznia, stosownie do jego potrzeb i możliwości.

Uczniom z niepełnosprawnościami szkoła zapewnia optymalne warunki pracy. Wybór form indywidualizacji nauczania powinien wynikać z rozpoznania potencjału każdego ucznia. Zatem nauczyciel powinien tak dobierać zadania, aby z jednej strony nie przerastały one możliwości ucznia (nie uniemożliwiały osiągnięcia sukcesu), a z drugiej nie powodowały obniżenia motywacji do radzenia sobie z wyzwaniami.

Bardzo istotna jest edukacja zdrowotna, która prowadzona konsekwentnie i umiejętnie będzie przyczyniać się do poprawy kondycji zdrowotnej społeczeństwa oraz pomyślności ekonomicznej państwa.

Zastosowanie metody projektu, oprócz wspierania w nabywaniu opisanych wyżej kompetencji, pomaga również rozwijać u uczniów przedsiębiorczość i kreatywność oraz umożliwia stosowanie w procesie kształcenia innowacyjnych rozwiązań programowych, organizacyjnych lub metodycznych.

Opis wiadomości i umiejętności zdobytych przez ucznia w szkole ponadpodstawowej jest przedstawiany w języku efektów uczenia się, zgodnie z Polską Ramą Kwalifikacji[6].

Działalność edukacyjna szkoły określona jest przez:

1) szkolny zestaw programów nauczania;
2) program wychowawczo-profilaktyczny szkoły.

Szkolny zestaw programów nauczania oraz program wychowawczo-profilaktyczny szkoły tworzą spójną całość i muszą uwzględniać wszystkie wymagania opisane w podstawie programowej. Ich przygotowanie i realizacja są zadaniem zarówno całej szkoły, jak i każdego nauczyciela.

Obok zadań wychowawczych i profilaktycznych nauczyciele wykonują również działania opiekuńcze odpowiednio do istniejących potrzeb.

Działalność wychowawcza szkoły należy do podstawowych celów polityki oświatowej państwa. Wychowanie młodego pokolenia jest zadaniem rodziny i szkoły, która w swojej działalności musi uwzględniać wolę rodziców, ale także i państwa, do którego obowiązków należy stwarzanie właściwych warunków wychowania. Zadaniem szkoły jest ukierunkowanie procesu wychowawczego na wartości, które wyznaczają cele wychowania i kryteria jego oceny. Wychowanie ukierunkowane na wartości zakłada przede wszystkim podmiotowe traktowanie ucznia, a wartości skłaniają człowieka do podejmowania odpowiednich wyborów czy decyzji. W realizowanym procesie dydaktyczno-wychowawczym szkoła podejmuje działania związane z miejscami ważnymi dla pamięci narodowej, formami upamiętniania postaci i wydarzeń z przeszłości, najważniejszymi świętami narodowymi i symbolami państwowymi.

W czteroletnim liceum ogólnokształcącym i pięcioletnim technikum są realizowane następujące przedmioty:

1) język polski;
2) język obcy nowożytny;
3) filozofia;

[6] *Ustawa z dnia 22 grudnia 2015 r. o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji* (Dz.U. z 2017 r., poz. 986 i 1475).

4) język łaciński i kultura antyczna;
5) muzyka;
6) historia muzyki;
7) plastyka;
8) historia sztuki;
9) historia;
10) wiedza o społeczeństwie;
11) geografia;
12) podstawy przedsiębiorczości;
13) biologia;
14) chemia;
15) fizyka;
16) matematyka;
17) informatyka;
18) wychowanie fizyczne;
19) edukacja dla bezpieczeństwa;
20) wychowanie do życia w rodzinie[7];
21) etyka;
22) język mniejszości narodowej lub etnicznej[8];
23) język regionalny – język kaszubski[8].

Matematyka

Matematyka jest nauką, która stanowi istotne wsparcie dla innych dziedzin, zwłaszcza dla nauk przyrodniczych i informatycznych. Nauczanie matematyki w szkole opiera się na trzech fundamentach: nauce rozumowania matematycznego, kształceniu sprawności rachunkowej i przekazywaniu wiedzy o własnościach obiektów matematycznych.

Rozumowanie matematyczne to umiejętność poszukiwania rozwiązania danego zagadnienia. Dobrze kształcona rozwija zdolność myślenia konstruktywnego, premiuje postępowanie nieschematyczne i twórcze. Ponadto rozumowanie matematyczne narzuca pewien rygor ścisłości: dowód matematyczny musi być poprawny. Dobre opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego ułatwia w życiu codziennym odróżnianie prawdy od fałszu.

[7] Sposób nauczania przedmiotu wychowanie do życia w rodzinie określają przepisy wydane na podstawie art. 4 ust. 3 *Ustawy z dnia 7 stycznia 1993 r. o planowaniu rodziny, ochronie płodu ludzkiego i warunkach dopuszczalności przerywania ciąży* (Dz.U., poz. 78, z 1995 r., poz. 334, z 1996 r., poz. 646, z 1997 r., poz. 943 i poz. 1040, z 1999 r., poz. 32 oraz z 2001 r., poz. 1792).

[8] Przedmiot język mniejszości narodowej lub etnicznej oraz przedmiot język regionalny – język kaszubski są realizowane w szkołach (oddziałach) z nauczaniem języka mniejszości narodowych lub etnicznych oraz języka regionalnego – języka kaszubskiego, zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 13 ust. 3 *Ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty* (Dz.U. z 2017 r., poz. 2198, 2203 i 2361).

Sprawność rachunkowa jest niezwykle ważnym elementem nauczania matematyki nawet obecnie, kiedy wiele rachunków wykonuje się za pomocą sprzętu elektronicznego. Ważnym celem ćwiczenia sprawności rachunkowej jest kształtowanie wyobrażenia o wielkościach liczb, a w konsekwencji doskonalenie umiejętności precyzyjnego szacowania wyników. Takie wyobrażenie ułatwia codzienne życie, na przykład planowanie budżetu domowego. Na wyższym poziomie, w działaniach na wyrażeniach algebraicznych, sprawność rachunkowa pozwala doskonalić umiejętność operowania obiektami matematycznymi.

Wiedza o właściwościach obiektów matematycznych pozwala na swobodne operowanie nimi i stosowanie obiektów matematycznych do opisu bądź modelowania zjawisk obserwowanych w rzeczywistości. Właściwości matematyczne modeli przekładają się często na konkretne własności obiektów rzeczywistych.

Podstawa programowa przedmiotu matematyka

III etap edukacyjny: 4-letnie liceum ogólnokształcące oraz 5-letnie technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także z użyciem kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych podczas przekształcania wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności do rozwiązywania problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.
   2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych podczas rozwiązywania problemów praktycznych i teoretycznych.
   3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.
   4. Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
   2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
   3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.
   4. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:
   a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
   b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;
3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x+4| = 5$, $|x-2| < 3$, $|x+3| \geq 4$;
8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n;
2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;
4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;
5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x-a$;

7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;
8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x+1}$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;
2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{n-1}=n$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$;
3) korzysta ze wzorów na: a^3+b^3, $(a+b)^n$ i $(a-b)^n$.

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:
1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x)>0$, $W(x)\geq 0$, $W(x)<0$, $W(x)\leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż $\frac{x+1}{x(x-1)}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$;

3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;
4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2|x+3|+3|x-1|=13$, $|x+2|+2|x-3|<11$;
5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax+by=e \\ x^2+y^2+cx+dy=f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax+by=e \\ y=cx^2+dx+f. \end{cases}$

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto rozwiązuje układy równań kwadratowych postaci $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by=c \\ x^2+y^2+dx+ey=f. \end{cases}$

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x-a)$, $y = f(x)+b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;
2) posługuje się złożeniami funkcji;
3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

VI. Ciągi.

Zakres podstawowy. Uczeń:
1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:

$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} a_n (1 - a_n), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \end{cases}$$

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
5) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

6) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;
2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;
2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$;
6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;
5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;
6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \le 1$.

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
5) oblicza odległość punktu od prostej;

6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;
2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;
3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:
1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;
2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

XI. Kombinatoryka.

Zakres podstawowy. Uczeń:
1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;

2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
   a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
   b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;
2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności w rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.
Zakres podstawowy. Uczeń:
1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
2) stosuje skalę centylową;
3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;
4) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
5) oblicza wartość oczekiwaną, np. podczas ustalania wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;
2) stosuje schemat Bernoulliego.

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.
Zakres podstawowy. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;
3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;
4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Warunki i sposób realizacji

Korelacja. Ze względu na użyteczność matematyki i jej zastosowania w szkolnym nauczaniu fizyki, informatyki, geografii i chemii zaleca się zrealizować treści nauczania określone w działach: I pkt 9 (logarytmy) i w miarę możliwości V pkt 14, V pkt 1 (pojęcie funkcji) i V pkt 5 (funkcje liniowe) w pierwszym półroczu klasy pierwszej, zaś treści nauczania określone w działach: V pkt 11 (funkcje kwadratowe) i V pkt 13 (proporcjonalność odwrotna) nie później niż do końca klasy pierwszej. Treści nauczania określone w dziale VI pkt 2 (obliczanie początkowych wyrazów ciągów określonych rekurencyjnie) można realizować w korelacji z analogicznym zagadnieniem podstawy programowej informatyki.

Oznaczenia. Uczniowie powinni używać powszechnie przyjętego oznaczenia zbiorów liczbowych, a w szczególności: dla liczb całkowitych symbolu Z, dla liczb wymiernych – Q, dla liczb rzeczywistych – R.

Przedziały. Uczeń powinien wykorzystywać przedziały do opisu zbioru rozwiązań nierówności. Najważniejsza w odpowiedzi jest jej poprawność. Na przykład rozwiązanie nierówności $x^2-9x+20>0$ może być zapisane na każdy z poniższych sposobów:

- rozwiązaniem nierówności może być każda liczba x, która jest mniejsza od 4 lub większa od 5;
- rozwiązaniami są wszystkie liczby x mniejsze od 4 i wszystkie liczby x większe od 5;
- $x<4$ lub $x>5$;
- $x\in(-\infty,4)$ lub $x\in(5,\infty)$;
- $x\in(-\infty,4)\cup(5,\infty)$.

Zastosowania logarytmów. Podczas nauczania logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością. Poniższe przykładowe zadania ilustrują zastosowania logarytmu.

Z1. Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem

$R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie *A* oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach,

$A_0 = 10^{-4}\,\mathrm{cm}$ jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 25 kwietnia 2015 r. w Nepalu miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 7,8 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

Z2. Chory przyjął dawkę 100 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie *t* określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$. Po pięciu godzinach organizm usuwa 30% leku. Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby.

Postać kanoniczna. Przy omawianiu funkcji kwadratowej podkreślać należy znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Warto zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

Złożenia funkcji i funkcje odwrotne. Definicja funkcji złożonej pojawia się dopiero w zakresie rozszerzonym, ale już w zakresie podstawowym oczekuje się od ucznia umiejętności operowania równocześnie danymi zaczerpniętymi z kilku źródeł. Nie wymaga to jednak formalnego wprowadzenia operacji złożenia czy odwracania funkcji.

Przekształcenia równoważne. W trakcie rozwiązywania równań i nierówności należy zwracać uwagę, że obok metody przekształceń równoważnych można stosować metodę wnioskowania (metoda analizy starożytnych). Po wyznaczeniu potencjalnego zbioru rozwiązań następuje sprawdzenie, które z wyznaczonych wartości istotnie są rozwiązaniami. W wielu sytuacjach nie warto domagać się przekształceń równoważnych, gdy metoda wnioskowania prowadzi do szybkich rezultatów. Ponadto uczniowie powinni wiedzieć, że uprawnioną metodą dowodzenia jest równoważne przekształcanie tezy.

Zastosowania algebry. Warunkiem powodzenia procesu nauczania matematyki jest sprawne posługiwanie się wyrażeniami algebraicznymi. Metody algebraiczne często dają się stosować w sytuacjach geometrycznych i na odwrót – ilustracja geometryczna pozwala lepiej zrozumieć zagadnienia algebraiczne.

Ciągi. Zagadnienie to należy omawiać tak, by uczniowie zdali sobie sprawę, że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy podkreślić, że poza ciągami niemalejącymi, rosnącymi, nierosnącymi, malejącymi i stałymi istnieją też takie, które nie są monotoniczne. Warto zwrócić uwagę uczniów, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie. Przykładowo podany w dziale VI pkt 2 lit. a) ciąg opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki (liczba a_n podaje, ile osób o plotce słyszało). Podobny model może być użyty do opisu rozprzestrzeniania się epidemii.

Granica ciągu. Przed sformułowaniem definicji granicy ciągu warto zadawać uczniom pytania w rodzaju: czy istnieje taka liczba naturalna *k*, że dla każdej liczby naturalnej *n* większej od *k* zachodzi nierówność $\frac{1}{3} < \frac{n}{2n+1} < \frac{2}{3}$? Twierdzenie o trzech ciągach także wspiera budowanie intuicji granicy ciągu. Obliczanie granic ciągów warto poprzedzić wykorzystaniem programów komputerowych do rysowania wykresów ciągów. Dokładniejsze obliczenia ułatwią w odpowiednio dobranych przykładach formułowanie hipotez na temat istnienia wartości granicy ciągu.

Planimetria. Rozwiązywanie klasycznych problemów geometrycznych jest skutecznym sposobem kształtowania świadomości matematycznej. Uczniowie, którzy rozwiązują zadania konstrukcyjne, nabywają dzięki temu wprawy w rozwiązywaniu zadań geometrycznych różnego typu, na przykład uczeń z łatwością przyswoi własności okręgów wpisanych w trójkąt czy czworokąt, jeśli potrafi skonstruować te figury. Nauczanie konstrukcji geometrycznych można przeprowadzać w sposób klasyczny, za pomocą linijki i cyrkla, można też używać specjalistycznych programów komputerowych, takich jak np. GeoGebra.

Dwumian Newtona. Ważne jest, żeby przy okazji nauczania wzoru na $(a+b)^n$ podkreślić znaczenie współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona) $\binom{n}{k}$ w kombinatoryce. Warto go również zapisywać w postaci $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}$, gdyż w tej formie jest bardziej widoczna jego interpretacja i łatwiej obliczyć jego wartość dla małych *k*.

Rachunek prawdopodobieństwa. Uczniowie w przyszłości będą mieli do czynienia z zagadnieniami powiązanymi z losowością, które występują w różnych dziedzinach życia i nauki, na przykład: w analizie sondaży, zagadnień z zakresu ekonomii i badaniach rynków finansowych lub w naukach przyrodniczych i społecznych. Warto wspomnieć o paradoksach rachunku prawdopodobieństwa, które pokazują typowe błędy w rozumowaniu i omówić niektóre z nich. Warto też przeprowadzać z uczniami eksperymenty, np. eksperyment, w którym uczniowie zapisują długi ciąg orłów i reszek bez losowania, a następnie zapisują ciąg orłów i reszek powstały w wyniku losowych rzutów monetą. Błędne intuicje na temat losowości podpowiadają zwykle, że nie powinny pojawiać się długie sekwencje orłów (albo reszek), podczas kiedy w rzeczywistości takie długie sekwencje orłów (lub reszek) występują. Omawianie w zakresie podstawowym wartości oczekiwanej nie wymaga wprowadzania pojęcia zmiennej losowej. Wskazane jest raczej posługiwanie się intuicyjnym rozumieniem wartości oczekiwanej zysku czy ustalanie liczby obiektów spełniających określone własności. W ten sposób uczeń ma możliwość dostrzeżenia związków prawdopodobieństwa z życiem codziennym oraz szanse kształtowania umiejętności unikania zachowań ryzykownych, np. podczas decyzji finansowych.

W zakresie rozszerzonym ważne jest uświadomienie uczniom, że rachunek prawdopodobieństwa nie ogranicza się jedynie do schematu klasycznego i używanej tam kombinatoryki. Dobrą ilustracją są przykłady zastosowania schematu Bernoulliego dla dużej liczby prób.

Pochodne. Posługiwanie się pojęciem granicy ilorazu różnicowego konieczne do zrozumienia pojęcia pochodnej wymaga dużych możliwości poznawczych. Dlatego też pochodne należy wprowadzać w pierwszej kolejności intuicyjnie, posługując się interpretacją fizyczną (prędkość chwilowa, natężenie prądu) oraz geometryczną (styczna, nachylenie wykresu). Podstawowym zastosowaniem definicji pochodnej może być wyprowadzenie wzoru na pochodną jednomianu i pochodną sumy, iloczynu i złożenia funkcji (gdy funkcja wewnętrzna jest różnowartościowa). Uczniowie powinni też poznać twierdzenie mówiące, że funkcja ciągła na przedziale i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna.

Dowody. Samodzielne przeprowadzanie dowodów przez uczniów rozwija logiczne myślenie, precyzyjne wyrażanie myśli i zdolność rozwiązywania złożonych problemów. Dowodzenie pozwala doskonalić umiejętność dobierania trafnych argumentów i konstruowania poprawnych rozumowań. Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia jest analizowanie dowodów poznawanych twierdzeń. W ten sposób można uczyć, jak powinien wyglądać właściwie przeprowadzony dowód. Formułowanie poprawnych rozumowań i uzasadnień jest ważne również poza matematyką. Poniżej znajduje się lista twierdzeń, których dowody uczeń powinien poznać.

Twierdzenia, dowody – zakres podstawowy

1. Istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych.
2. Niewymierność liczb: $\sqrt{2}$, $\log_2 5$ itp.
3. Wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego.
4. Podstawowe własności potęg (o wykładnikach całkowitych i wymiernych) i logarytmów.
5. Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x - a$ wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia.

6. Wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.
7. Twierdzenie o kątach w okręgu:
   1) kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku;
   2) jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach.
8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym. Jeśli odcinek *CD* jest wysokością trójkąta prostokątnego *ABC* o kącie prostym *ACB*, to , $|AD| \cdot |BD| = |CD|^2$, $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$ oraz $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$
9. Twierdzenie o dwusiecznej. Jeśli prosta *CD* jest dwusieczną kąta *ACB* w trójkącie *ABC* i punkt *D* leży na boku *AB*, to $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.
10. Wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.
11. Twierdzenie sinusów.
12. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenia, dowody – zakres rozszerzony

1. Dowód kombinatoryczny tożsamości: jeśli $0 < k < n$, to $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
2. Wzór dwumianowy Newtona. Wzory skróconego mnożenia na $a^n \pm b^n$ (przy odpowiednich założeniach o *n*) oraz jako wniosek: dla liczb całkowitych *a* i *b*, $a - b \mid a^n - b^n$.
3. Wzory Viète'a.
4. Wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.
5. Twierdzenia o istnieniu niektórych punktów szczególnych trójkąta:
   a) symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie i (jako wniosek) proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie,
   b) środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
6. Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg. Czworokąt wypukły *ABCD* można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|\angle BAD| + |\angle BCD| = |\angle ABC| + |\angle ADC| = 180°$.
7. Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu. W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.
8. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny. Dane są proste *k*, *l* i *m* leżące na jednej płaszczyźnie. Jeśli proste *k* i *l* przecinają się i prosta *n* jest do nich prostopadła, to prosta *n* jest także prostopadła do prostej *m*.
9. Twierdzenie o trzech prostopadłych. Prosta *k* przecina płaszczyznę *P* i nie jest do niej prostopadła. Prosta *l* jest rzutem prostokątnym prostej *k* na płaszczyznę *P*. Prosta *m* leży na płaszczyźnie *P*. Wówczas proste *k* i *m* są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy proste *l* i *m* są prostopadłe.

Komentarz do podstawy programowej przedmiotu matematyka

Liceum i technikum

dr hab. Maciej Borodzik, dr Michał Krych, Regina Pruszyńska

Informacje o podstawie programowej matematyki do szkół ponadpodstawowych

Podczas pracy nad podstawą programową do szkół ponadpodstawowych, podobnie jak w tworzeniu podstawy do ośmioletniej szkoły podstawowej, za punkt wyjścia przyjęto część podstawy gimnazjum oraz obecnie obowiązującą podstawę liceum ogólnokształcącego. Część zmian, których dokonano w stosunku do dotychczasowej podstawy, ma charakter korekt zapisów, które okazały się być interpretowane niezgodnie z intencjami jej twórców; inne powodowane są chęcią zmiany filozofii nauczania danego zagadnienia. W niniejszym komentarzu omawiamy różnice i wyjaśniamy, na czym polegają zmiany.

Cele ogólne – zmiany

W celach ogólnych dokonano zasadniczo dwóch zmian.

1. Pierwsza – celem uproszczenia usunięto dość sztuczny, jak się zdawało, podział na cele ogólne dla zakresu podstawowego matematyki i cele ogólne dla zakresu rozszerzonego. Przyczynia się to do zwiększenia zwięzłości podstawy.
2. Druga – dodano punkt dotyczący szeroko rozumianej sprawności rachunkowej. W podstawie programowej sprawność rachunkowa rozumiana jest również jako umiejętność operowania wyrażeniami algebraicznymi, a nie tylko jako umiejętność przeprowadzania rachunków na liczbach.

Dodanie punktu poświęconego sprawności rachunkowej podkreśla ciągłość procesu nauczania w zakresie operowania obiektami algebraicznymi: od dodawania liczb naturalnych, poprzez cztery podstawowe działania wykonywane najpierw na liczbach naturalnych, później całkowitych, w końcu ułamkach zwykłych i dziesiętnych, aż po umiejętność dodawania, odejmowania, mnożenia i – w pewnych wypadkach – dzielenia wyrażeń algebraicznych. Wpisanie w podstawę programową sprawności rachunkowej podkreśla, że jeśli powyższy proces jest naruszony w którymś punkcie, inaczej mówiąc, jeśli uczeń zatrzymał się na którymś etapie – a praktyka szkolna pokazuje, iż dzieje się to stosunkowo często – niemożliwe jest dojście do poziomu swobodnego operowania wyrażeniami algebraicznymi. Ten poziom jest jednak niezbędny podczas rozwiązywania większości zadań poświęconych funkcjom, układom równań, problemom obliczeniowym z geometrii i stereometrii czy rachunkowi prawdopodobieństwa.

Jednym z najważniejszych zadań w nauczaniu matematyki w szkole ponadpodstawowej jest nauczenie ucznia rozumowania matematycznego, w szczególności przeprowadzania dowodów matematycznych. Proces ten, zgodnie z podstawą programową ośmioletniej szkoły podstawowej, powinien rozpocząć się już w klasach VII–VIII, a w szkole ponadpodstawowej powinien być kontynuowany. Podstawa programowa przewiduje, że uczeń będzie potrafił dowodzić proste tożsamości algebraiczne (punkt I. 2) podstawy), a także przeprowadzać dowody geometryczne (punkt VIII. 12)).

Nowości w podstawie

Jedną z nowości w podstawie jest umieszczenie w warunkach realizacji wskazania, aby uczeń poznał dowody niektórych twierdzeń matematycznych, związanych z treściami nauczania. Zabieg ten ma na celu uświadomienie uczniom, co to jest dowód oraz jaka jest jego rola w matematyce. Bardzo trudno jest wyjaśnić uczniowi, czego oczekuje się od niego, każąc mu rozwiązać zadanie na dowodzenie, jeśli wcześniej nie zobaczy on na lekcji techniki przeprowadzania dowodu. Umieszczenie wybranych dowodów w warunkach realizacji, a nie w treściach nauczania oznacza, że znajomość tych dowodów stanowi uzupełnienie treści kształcenia i takie było założenie twórców podstawy.

Treści nauczania – zmiany

Liczby rzeczywiste

Pierwszą zmianą, postulowaną przez wiele środowisk, jest rezygnacja z wprowadzania liczb niewymiernych przez rozwinięcia dziesiętne i zastąpienie tego klasyczną definicją (liczby wymierne to ilorazy liczb całkowitych). Dla ilustracji powinien pojawić się dowód niewymierności $log_2 5$ lub $\sqrt{2}$ – oba dowody wymienione są w warunkach realizacji. Wysiłek ucznia nakierowany na zrozumienie, czym różni się liczba wymierna od niewymiernej, jest niewspółmiernie duży w stosunku do rozwoju umiejętności matematycznych. Odróżniania liczby niewymiernej od wymiernej (w tym niewymierność liczby π), uczono w szkołach z przyczyn historycznych, ale nie znajduje żadnego zastosowania poza akademicką matematyką teoretyczną. Zrozumienie dowodu niewymierności jakiejś liczby jest znacznie ważniejsze od zapamiętania, że np. π nie jest liczbą wymierną.

Druga zmiana w punkcie pierwszym jest nieco mniej widoczna. Autorzy podstawy programowej postulują nauczanie logarytmów w następujący sposób: na początku poznanie przykładów zastosowań, w szczególności zjawisk, do których opisu stosuje się funkcje logarytmiczne i wykładnicze, a dopiero później omówienie własności funkcji logarytmicznej. W podstawie programowej podano kilka przykładów takich zastosowań. Nauczyciele i autorzy podręczników są zachęcani do tego, aby znajdować więcej przykładów pokazujących obecność zagadnień matematycznych w życiu. Taki sposób nauczania uświadamia uczniom, że funkcja logarytmiczna jest niezwykle ważna w opisie przyrody.

Wpisanie punktu I. 1) dotyczącego operacji na liczbach rzeczywistych jest *de facto* sprawą techniczną. Nie ma on na celu wprowadzania nowych treści, ale ma pozwolić

podczas rozwiązywania zadań na zapisy typu: $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{3}}$, które są *de facto* sumami liczb rzeczywistych.

Algebra. W działach poświęconych szeroko rozumianej algebrze (punkty II, III i IV podstawy) w istotny sposób zwiększono ilość materiału do nauczania w zakresie podstawowym. Otóż zamierzeniem twórców podstawy programowej jest, aby każdy uczeń umiał swobodnie dodawać i mnożyć sumy algebraiczne, co dotychczas nie było spełnione. Proces uczenia jest dość długi i często żmudny. Umieszczenie dzielenia wielomianu przez dwumian i prostych wyrażeń wymiernych ma na celu urozmaicenie nauczania dzięki operowaniu wyrażeniami algebraicznymi. W zamyśle twórców podstawy rozpatrywane na lekcjach przykłady powinny być proste.

Wprowadzono więcej wzorów skróconego mnożenia na poziomie podstawowym. Często zdarzało się bowiem, że uczeń, który znał bardzo dobrze wzór na kwadrat sumy, jeśli była taka potrzeba, wymyślał wzór na sześcian sumy postaci: $(a+b)^3=a^3+b^3$ lub $(a+b)^3=a^3+3ab+b^3$. Dodanie wzoru na sześcian sumy ma zapobiec tego typu pomyłkom. Wzór na a^n-b^n tak naprawdę jest cały czas nauczany w szkołach przy okazji wzoru na sumę wyrazów szeregu geometrycznego. Wpisanie go w punkcie poświęconym wzorom skróconego mnożenia tworzy połączenie między dwiema dziedzinami matematyki i przy tej okazji zauważa się, że różne wzory są szczególnymi przypadkami jednego twierdzenia. Wielu uczniów szybciej go zapamiętuje i łatwiej go stosuje.

Przy wprowadzaniu równań dokonano próby zmiany metody nauczania, w której kładzie się bardzo duży nacisk na obliczanie wyróżnika (zwanego deltą) w równaniu kwadratowym. Prowadzi to często do absurdalnych przypadków, gdy uczeń, mając równanie zapisane w postaci $x(x-4)=0$, aby wyznaczyć pierwiastki, oblicza wyróżnik. Oznacza to niezrozumienie tego, czym jest pierwiastek; aby temu zaradzić dodano w podstawie punkt III. 6). Według zapisów w podstawie uczeń nie musi znać wzoru na wyróżnik ani nawet nie musi zobaczyć tego wzoru na lekcji: wystarczy, aby umiał rozwiązywać równania kwadratowe przez dopełnianie do pełnego kwadratu. Wzór na wyróżnik może być wygodny podczas analizowania równań kwadratowych (punkt III. 5) podstawy w rozszerzeniu). Dzielenie wielomianu przez dwumian (punkt II. 6) podstawy) również służy temu, aby uczeń lepiej zrozumiał, czym jest pierwiastek wielomianu.

Geometria. W nauczaniu geometrii postawiono na nauczanie całościowe, dlatego twierdzenia sinusów i cosinusów zamieszczono w treściach nauczania w podstawie programowej w zakresie podstawowym, a nie tak jak było poprzednio – w zakresie rozszerzonym. Twierdzenie cosinusów, które jest uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa, może być wykorzystane i rozumiane jako twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Podczas rozwiązywania zadań typu: rozstrzygnij, czy trójkąt o bokach 5, 6 i 10 jest prostokątny, rozwartokątny czy ostrokątny (zob. punkt VIII. 2) podstawy), bardzo wygodnie jest skorzystać z twierdzenia cosinusów. Przy wyznaczaniu naprzeciwko którego kąta leży najdłuższy bok, twierdzenie sinusów okazuje się bardzo wygodnym narzędziem.

Zadania konstrukcyjne zostały opisane w treściach nauczania jako pomoc w nauczaniu geometrii. Tymczasem część nauczycieli bardzo unika takich zadań ze względu na trudności techniczne związane z przedstawieniem rozwiązania na tablicy; inni preferują wykorzystywanie programów komputerowych do konstrukcji. Nie chcąc narzucać ustalonego schematu, twórcy podstawy umieścili zadania konstrukcyjne w warunkach realizacji. Należy zaznaczyć, że punkt VIII. 10) podstawy, mówiący o tym, że uczeń wskazuje szczególne punkty w trójkącie, będzie bardzo trudny w realizacji, jeśli zadania konstrukcyjne zostaną całkowicie pominięte. Zadania konstrukcyjne, których jest wiele, pozwalają uczniom wykazać się umiejętnością znalezienia metody konstruowania, a potem uzasadnić jej poprawność we wszystkich konfiguracjach lub wskazać zmiany w zależności od wzajemnego położenia punktów, prostych itd.

Ciągi. W dziale dotyczącym ciągów (punkt VI) wprowadzono szereg zmian, które stawiają nauczanie tego zagadnienia w nieco innym świetle. Dotychczasowa praktyka nauczania kładła nacisk przede wszystkim na ciągi arytmetyczne i geometryczne. W obecnej podstawie zmieniono główne założenia. Dwa punkty zasługują na szczególną uwagę.

Po pierwsze, uczeń powinien umieć obliczyć kilka pierwszych wyrazów ciągu zadanego rekurencyjnie (punkt VI. 2)). Zagadnienie to można realizować w korelacji z nauczaniem informatyki, gdzie używanie rekurencji w programowaniu jest dość istotne. Dwa przykłady ciągów podane w podstawie programowej nie są przypadkowe. Pierwszy to ciąg Fibonacciego, który ma wiele własności – niektórych z nich można uczyć na lekcjach ze zdolniejszymi uczniami. Drugi przykład mówi o ciągu opisującym rozprzestrzenianie się plotki. Podobne modele można rozważać, opisując rozwój epidemii. W tym miejscu mamy niejako ukrytą korelację z biologią: nauczyciel matematyki lub biologii, opierając się na własnościach tego ciągu, może poruszyć temat wyszczepialności populacji. Kluczową informacją dla ucznia wynikającą z rozpatrywania przykładów ciągów zadanych rekurencyjnie jest to, że niektóre zjawiska fizyczne, przyrodnicze czy społeczne można opisać (w przybliżony sposób) i badać za pomocą ciągów.

Drugi z punktów zasługujących na podkreślenie to badanie monotoniczności ciągu. W zakresie podstawowym oczekujemy, że uczeń będzie badał proste ciągi o wyrazie ogólnym typu: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$, $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $d_n = n - 1 + \frac{1}{n^2}$. Można również badać monotoniczność ciągu zadanego rekurencyjnie, który pojawia się w sytuacjach wziętych z życia. Dla przykładu, ktoś ma w banku na lokacie 10 000 PLN oprocentowane na 2%

w skali roku, a z lokaty pobiera rocznie 150 PLN: czy stan jego konta będzie rósł, czy malał? Naturalnie, w takim zadaniu można pokusić się o zapisanie stanu konta za pomocą zwartego wzoru, monotoniczność ciągu opisującego stan konta w kolejnych latach jest jednak o wiele łatwiejsza do zauważenia.

W zakresie rozszerzonym przywrócono twierdzenie o trzech ciągach. Dzięki takiemu sformułowaniu punktu VI. 1) typ ciągów, których granice uczeń powinien umieć obliczyć, jest dość precyzyjnie określony. Ciągi o wyrazach ogólnych: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $b_n = \frac{sinn}{n}$ czy $c_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ mieszczą się w tym typie, ale ciągi o wyrazach ogólnych: $a_n = nsin\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{logn}{n}$ już nie. Skala trudności zadań na obliczanie granic jest dość duża, w szczególności dostępnych jest sporo nietypowych zadań różnicujących ucznia zdolnego od bardzo zdolnego, które mogą być wykorzystane podczas egzaminu maturalnego. Co więcej, twierdzenie o trzech ciągach jest bardzo intuicyjne, jego dowód jest prosty i pomaga w zrozumieniu pojęcia granicy ciągu.

Prawdopodobieństwo. Do zagadnień z rachunku prawdopodobieństwa dodano obliczanie wartości oczekiwanej w prostych grach (punkt XII. 5). Nie należy tego punktu traktować jako zachęty do wprowadzania całej teorii zmiennej losowej i wartości oczekiwanej, a jedynie przedstawić ogólny algorytm obliczania wartości oczekiwanej wygranej w grach typu „płacę 1 PLN za rzut kostką, jeśli wypadnie 6 to wygrywam 4 PLN, jeśli wypadnie coś innego – tracę zapłacone pieniądze". Jakkolwiek takiemu podejściu można zarzucać algorytmiczność i nierozwijanie umiejętności matematycznych, to intuicyjne opanowanie algorytmu jest możliwe nawet dla stosunkowo słabych uczniów. Myślą przewodnią, jaką uczeń powinien wynieść z takich lekcji jest to, że można obliczać szanse wygranej i kierować się obliczeniami z rachunku prawdopodobieństwa w życiu codziennym. Rozwiązanie nawet kilku przykładowych zadań podobnego typu może częściowo uchronić uczniów przed podejmowaniem ryzykownych działań ekonomicznych w przyszłości.

Realizując treści z zakresu rozszerzonego, zwłaszcza w klasach o profilach matematyczno-przyrodniczych, warto wyjaśnić uczniom, że prawdopodobieństwo zależy od przyjętego modelu. Służyć temu może paradoks Bertranda: zadanie polega na obliczeniu prawdopodobieństwa, że losowo wybrana cięciwa okręgu o promieniu r>0 jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg. Łatwo można uzasadnić trzy różne wyniki zależne od przyjętego sposobu losowego wyboru cięciwy.

Na poziomie rozszerzonym powinny pojawiać się też zadania, w których przestrzeń zdarzeń elementarnych ma tak wiele elementów, że do obliczenia ich liczby trzeba użyć kalkulatora/komputera, by zapis wyniku typu $p = \frac{10000!}{5000! \cdot 5000! \cdot 2^{10000}}$ nic nie mówił o jego wielkości $(p \approx 0.008)$ i by naiwne użycie kalkulatora nic nie dawało. Trzeba też uświadamiać uczniom, że rachunek prawdopodobieństwa bywa używany w takich sytuacjach. W podręcznikach powinien pojawiać się, oczywiście bez dowodu, wzór Stirlinga, bo on pozwala na szacowania wyrażeń zawierających $n!$ dla dużych n. Zadania, w których wyniku nie daje się uzyskać za pomocą wypisania wszystkich zdarzeń elementarnych, są konieczne dla zrozumienia rachunku oraz przyjęcia do wiadomości tego, że wzory kombinatoryczne są użyteczne.

Obecność w treściach nauczania w podstawie programowej wzoru Bayesa, zwanego też wzorem na odwrócenie, pozwala na rozwiązywanie zadań związanych z praktycznym stosowaniem prawdopodobieństwa. Jednak trzeba pamiętać o tym, że prawdopodobieństwo warunkowe, choć jest pozornie łatwym pojęciem, stwarza uczniom trudności poznawcze.

Statystyka. W dziale statystyka pozostawiono obliczanie odchylenia standardowego, głównie ze względu na korelacje z przedmiotami eksperymentalnymi. Podobnie jak było do tej pory, w treściach nauczania nie jest wyjaśnione, dlaczego odchylenie standardowe jest ważne i jakie ma zastosowanie. Aby wyjaśnić to zagadnienie, należałoby do nauczania w szkołach wprowadzić rozkład normalny, albo przynajmniej podać regułę empiryczną, to znaczy, że dla rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej E i odchyleniu standardowym D, 95% wyników mieści się w przedziale [E-2D, E+2D]. W klasach, w których jest to możliwe, wprowadzenie takiej reguły jest wskazane, niemniej dodanie jej do podstawy programowej nie jest możliwe ze względu na konieczność zwiększenia liczby godzin na nauczanie matematyki.

Funkcje. Punkt V. 3) umieszczony w dziale *Funkcje* jest również ściśle powiązany ze statystyką. Zdarza się, że uczeń ma trudności z łączeniem danych z różnych źródeł, jak w przykładowych zadaniach:

1. Jaś szedł po górach. Podane są dwa wykresy. Pierwszy oznacza zależność przebytej drogi od czasu, drugi zależność wysokości od położenia. Na jakiej wysokości Jaś był o godzinie 14.00?
2. Dany jest wykres rozpuszczalności azotanu srebra w wodzie w zależności od temperatury. W jakiej temperaturze rozpuszcza się w 100 g wody dokładnie połowa tej ilości azotanu srebra, jaka rozpuszcza się w temperaturze 80 stopni?

Przy bliższej analizie zadanie 1 wymaga złożenia funkcji, zadanie 2 – użycia funkcji odwrotnej. W zakresie podstawowym oczekujemy jednak wyłącznie intuicyjnego posługiwania się tymi pojęciami, jak w powyższych dwóch zadaniach. Ten punkt powinien być traktowany jako wstęp do nauki o złożeniach funkcji w zakresie rozszerzonym.

Optymalizacja i rachunek różniczkowy. W dziale poświęconym rachunkowi różniczkowemu (punkt XIII) zmieniono tytuł na *Optymalizacja i rachunek różniczkowy* oraz w zakresie podstawowym dodano punkt mówiący o stosowaniu funkcji kwadratowej do optymalizacji. Nie jest on nowością, był bowiem zamieszczany w poprzednich podstawach, ale w działach poświęconych funkcji kwadratowej. Przeniesienie tego punktu, a także wspomniana zmiana nazwy działu ma na celu podkreślenie wagi optymalizacji. Uczeń powinien kończyć szkołę z przeświadczeniem, że wiele rzeczy w matematyce da się zoptymalizować; nawet jeśli z czasem zapomni konkretnych metod, będzie mógł do nich wrócić, o ile zachowa „optymalizacyjne" spojrzenie na matematykę.

Wprowadzając pochodne, należy od razu wiązać je z fizyką (prędkość chwilowa, przyspieszenie chwilowe jako granice prędkości średniej i przyspieszenia średniego w krótkich okresach czasu i wspomnieć, że tak działają prędkościomierze) oraz z geometrią (prowadzimy proste przez ustalony punkt wykresu i bliskie mu punkty wykresu, a w granicy otrzymujemy styczną do wykresu). Związek pochodnej ze styczną pozwala uczniowi na geometryczne zrozumienie wzoru na wartość przybliżoną funkcji.

Jednym z głównych celów wprowadzania pochodnych jest zrozumienie przez uczniów postępowania pozwalającego na stwierdzenie, gdzie funkcja rośnie, gdzie maleje i wywnioskowania stąd, w których punktach przyjmuje największą lub najmniejszą wartość. Ponieważ w szkole w zasadzie nie ma możliwości omawiania twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą na domkniętym przedziale, więc monotoniczność jest jedynym narzędziem pozwalającym uczniom na stwierdzenie, że w jakimś punkcie funkcja ma największą lub najmniejszą wartość. Twierdzenie Fermata o zerowaniu się pochodnej w tych punktach wewnętrznych dziedziny, w których funkcja przyjmuje wartość ekstremalną jest ważne, ale pozostaje kwestia wyjaśnienia, w których punktach krytycznych rzeczywiście są przyjmowane wartości ekstremalne funkcji. Nauczanie tego twierdzenia często prowadzi do zapamiętania przez uczniów wygodnej, ale niepoprawnej reguły: „pochodna się zeruje, znaczy mamy maksimum albo minimum, zależnie od tego, czego szukamy". Szukanie ekstremów przez badanie monotoniczności (znaku pochodnej) pozwala na uniknięcie tego rodzaju błędów.

Twierdzenie o monotoniczności na przedziale funkcji, której pochodna ma stały znak, pozwala również na dowodzenie nierówności, więc szacowanie funkcji, np. łatwo można udowodnić, że dla x>0 zachodzi nierówność podwójna $1+\frac{x}{4}-\frac{3}{32}x^2<\sqrt[4]{1+x}<1+\frac{x}{4}$.

Twierdzenie o pochodnej funkcji potęgowej $\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$ powinno być formułowane dla dowolnego wykładnika rzeczywistego, a dowodzone w zakresie dostępnym dla ucznia, więc co najwyżej dla wymiernych wykładników, w szczególności dla wykładnika $\frac{1}{2}$ i nie powinno się traktować wzoru na pochodną pierwiastka kwadratowego jako oddzielnego twierdzenia, co często ma miejsce. Warto podkreślić, że wspomniany wzór działa zawsze wtedy, gdy jego prawa strona ma sens, więc również dla niedodatnich x

(dla niektórych a, np. dla $a = \frac{1}{3}$, $a = \frac{2}{7}$, $a = -\frac{1939}{1683}$ ale nie dla $a = -\frac{5}{2}$).

Jednym z nielicznych rzeczywistych zastosowań fizycznych osiągalnych w szkole jest prawo odbicia światła od zwierciadła w kształcie wykresu funkcji różniczkowalnej: kąt padania równy jest kątowi odbicia, które można wywnioskować z zasady Fermata: światło porusza się z punktu A do punktu B po drodze, na przebycie której potrzebuje najmniej czasu, kąty to kąty, jakie tworzy promień ze styczną do wykresu funkcji. Fakt ten wynika natychmiast z tego, że pochodna w punkcie, w którym funkcja ma najmniejszą wartość jest zerem. Można ten przykład omówić, bo uczniowie dysponować będą wzorem na pochodną funkcji $x^{1/2}$ i wzorem na pochodną złożenia.

Wskazówki metodyczne

dr hab. Maciej Borodzik, dr Michał Krych, Regina Pruszyńska

Chcemy ułatwić nauczycielom wprowadzanie w szkole ponadpodstawowej niektórych treści nauczania zapisanych w podstawie programowej matematyki. Dlatego też do wybranych działów wymagań szczegółowych zamieszczamy po kilka przykładów zadań wraz z ich rozwiązaniami; inne rozwiązania, o ile są tylko prawidłowe, są dopuszczalne. Zaproponowane metody rozwiązania nie powinny być traktowane przez nauczycieli jako wytyczne zawężające spektrum możliwości.

Pochodne i optymalizacja

Przypominamy najpierw metody wyznaczania pochodnej.

Twierdzenie 1. (o arytmetycznych własnościach pochodnej)
Załóżmy, że funkcje f i f są różniczkowalne w punkcie x. Wtedy funkcje $f \pm g$, $f \cdot g$ i, jeśli $g(x) \neq 0$, to również $\frac{f}{g}$ są różniczkowalne w punkcie x i zachodzą wzory:

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ oraz $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,

b) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ oraz $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

c) $(cf(x))' = cf'(x)$ dla każdego $c \in \boldsymbol{R}$.

Ważny wzór $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ dla każdej pary liczb rzeczywistych x, n, dla których nx^{n-1} jest zdefiniowane, w szczególności: jeśli $x > 0$, to dla każdego rzeczywistego n, jeśli $x < 0$, to dla każdego n wymiernego, które można zapisać w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie q jest liczbą całkowitą, liczba całkowita q jest nieparzysta i dodatnia, $NWD(p,q) = 1$.

Na przykład:
$\left(x^2\right)' = 2x$ dla każdej liczby rzeczywistej x;

$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ dla każdego $\geq$, przyjmujemy, że $0^a = 0$ dla każdego $a > 0$;

$\left(x^{-7}\right)' = -7x^{-8}$ dla każdego $x \neq 0$;

$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{2/3}\right)' = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ dla każdego $x \neq 0$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = \left(x^{-1/4}\right)' = -\dfrac{1}{4}x^{-5/4} = \dfrac{-1}{4\sqrt[4]{x^5}}$ dla każdego $x > 0$;

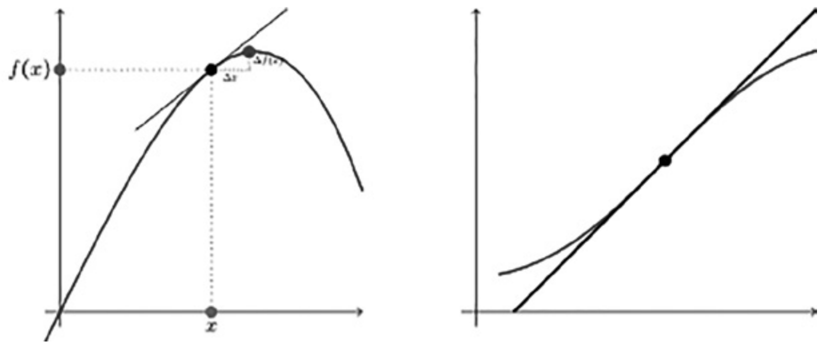
$\left(\dfrac{2x+3}{3x+4}\right)' = \dfrac{(2x+3)'(3x+4)-(2x+3)(3x+4)'}{(3x+4)^2} = \dfrac{2(3x+4)-3(2x+3)}{(3x+4)^2} = \dfrac{-1}{(3x+4)^2}$ dla każdego $x \neq -\dfrac{4}{3}$;

$\left((2x+3)(3x+4)\right)' = (2x+3)'(3x+4)+(2x+3)(3x+4)' = 2(3x+4)+3(2x+3) = 12x+17$

dla każdego rzeczywistego x, można też inaczej

$\left((2x+3)(3x+4)\right)' = \left(6x^2+17x+12\right)' = 6\cdot 2x+17 = 12x+17.$

Definicja stycznej do wykresu funkcj



Jeśli funkcja f ma (skończoną) pochodną w punkcie p, to mówimy, że prosta o współczynniku kierunkowym przechodząca przez punkt $P = \left(p, f(p)\right)$ wykresu funkcji f jest styczna do wykresu w punkcie P.

Styczna ma więc równanie $y = f'(p)(x-p)+f(p)$.

Styczną do wykresu funkcji $y = x^2$ w punkcie $(1,1)$ jest prosta o równaniu $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$.

Styczną do wykresu funkcji $y=(2x+3)(3x+4)$ w punkcie $(-1,1)$ jest prosta o równaniu $y=5(x+1)+1=5x+6$.

Styczną do wykresu funkcji $y=3x+4$ w punkcie $(-1,1)$ jest prosta o równaniu $y=3(x+1)+1=3x+4$, więc w tym wypadku styczna pokrywa się z wykresem.

Przytoczymy teraz najważniejsze z punktu widzenia szkolnej matematyki twierdzenie o pochodnych.

Twierdzenie 2. (o monotoniczności funkcji różniczkowalnej)
Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału P i różniczkowalną we wszystkich jego punktach wewnętrznych. Przy tych założeniach funkcja f jest:

- niemalejąca $\left(x<y \Rightarrow f(x) \le f(y)\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest nieujemna,
- nierosnąca $\left(x<y \Rightarrow f(x) \ge f(y)\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest niedodatnia.

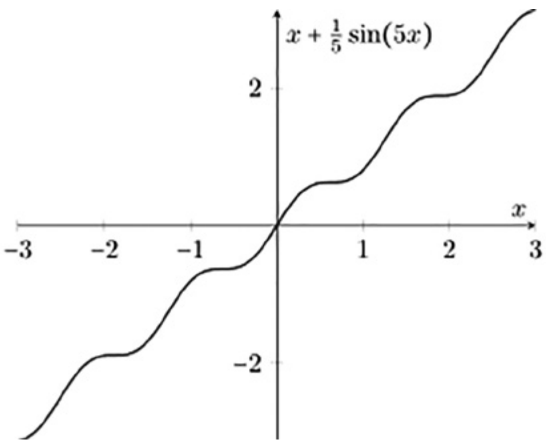
Twierdzenie 3. (charakteryzujące funkcję stałą)
Funkcja ciągła na przedziale P, różniczkowalna we wszystkich jego punktach wewnętrznych jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x)=0$ dla każdego punktu wewnętrznego przedziału P.

Dowód. Funkcja stała jest jednocześnie niemalejąca i nierosnąca, zatem jej pochodna jest jednocześnie nieujemna i niedodatnia, czyli zerowa. Jeśli natomiast pochodna jest zerowa, czyli jednocześnie nieujemna i niedodatnia, to funkcja jest zarówno niemalejąca, jak i nierosnąca, więc jest stała.

Twierdzenie 4. (o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnych)
Zakładamy jak poprzednio, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału P oraz że jest różniczkowalna w każdym punkcie wewnętrznym przedziału P. Przy tych założeniach funkcja f jest:

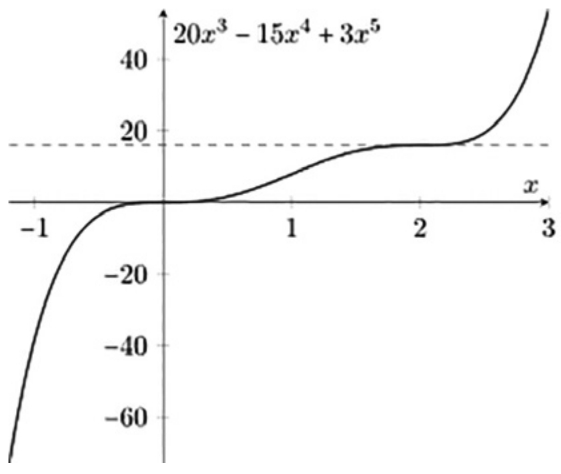
- ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna oraz między każdymi dwoma punktami przedziału P znajduje się punkt, w którym pochodna f' jest dodatnia,
- ściśle malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niedodatnia oraz między każdymi dwoma punktami przedziału P znajduje się punkt, w którym pochodna f' jest ujemna.

Ilustracją twierdzenia o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnej jest funkcja $f(x) = x + \frac{1}{5} sin(5x)$, której wykres zamieszczono poniżej.



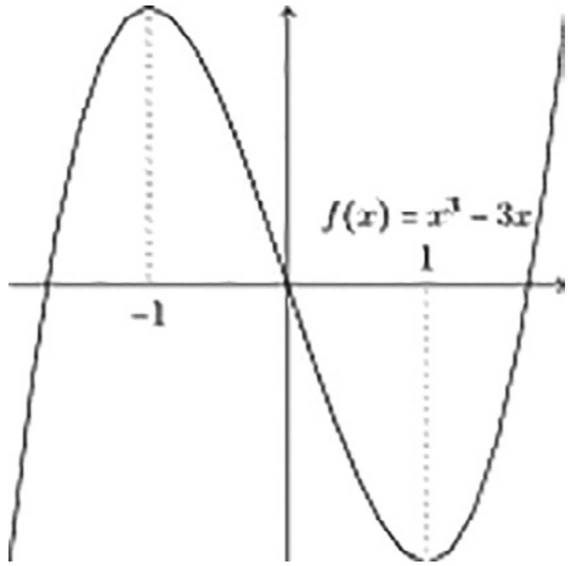
Przykład 1 pokazuje zastosowanie twierdzenia o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnej.

Przykład 1.
Niech $f(x) = 20x^3 - 15x^4 + 3x^5$.



Wtedy zachodzi równość $f'(x) = 60x^2 - 60x^3 + 15x^4 = 15x^2(x-2)^2 \geq 0$ przy czym ta pochodna zeruje się jedynie w punktach 0 oraz 2. Z twierdzenia o ścisłej monotoniczności wynika, że funkcja f jest ściśle rosnąca na całej prostej.

Przykład 2.
Niech $f(x) = x^3 - 3x$.



Mamy wtedy $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1\ )$, więc $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \ x = 1$ lub $x = -1$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ lub $x < -1$ oraz $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Wobec tego f jest ściśle rosnąca na każdej z półprostych $(-\infty, -1>$, $<1, +\infty)$, ściśle malejąca na przedziale $< -1, 1 >$.

Jaka jest największa wartość funkcji na przedziale $< -1, 2 >$?

Z monotoniczności funkcji f wnioskujemy, że jest to większa z liczb $f(-1) = 2$ i $f(2) = 2$, więc jest to 2. Najmniejszą wartością f na przedziale $< -1, 2 >$ jest oczywiście $f(1) = -2$.

Jaka jest największa wartość funkcji f na przedziale $< -3, 3 >$?

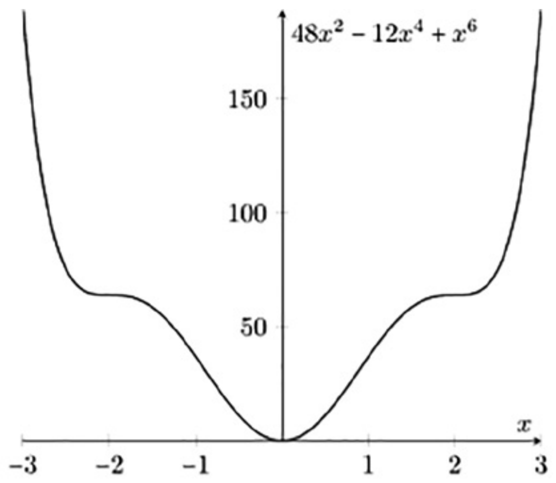
Z monotoniczności funkcji f wnioskujemy, że jest to większa z liczb $f(-1) = 2$ i $f(3) = 18$, więc jest to 18. Najmniejszą wartością f na przedziale $< -3, 3 >$ jest oczywiście mniejsza z liczb $f(-3) = -18$ i $f(1) = -2$, więc jest to liczba $= -18$.

Widać więc, że największa (lub najmniejsza) wartość funkcji może być przyjmowana wewnątrz przedziału w punkcie zerowania się pochodnej lub w końcu przedziału i wtedy pochodna nie musi się zerować.

Uwaga. Bardzo często uczniowie piszą, że funkcja f jest ściśle rosnąca na zbiorze $(-\infty, -1 > \cup < 1, +\infty)$, co jest błędem, bo $-1 < 1$ oraz $2 = f(-1) > f(1) = -2$.

Przykład 3.

Niech $f(x) = 48x^2 - 12x^4 + x^6$.

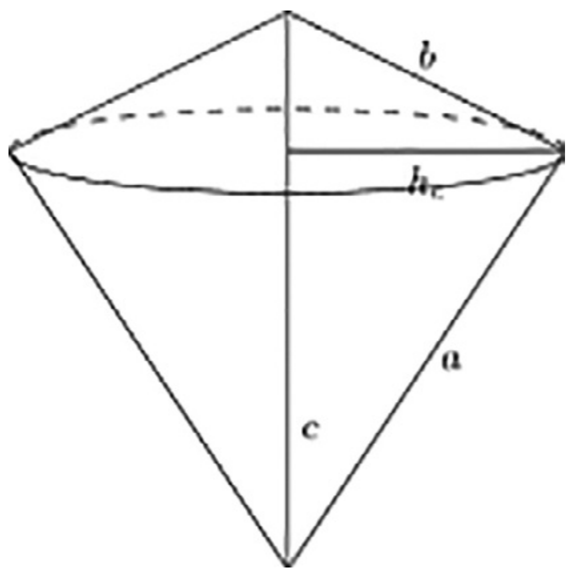


Wtedy $f'(x) = 96x - 48x^3 + 6x^5 = 6x\left(x^2 - 4\right)^2$. Wobec tego $f'(x) \le 0$ dla każdego $x < 0$ oraz $f'(x) \ge 0$ dla każdego $x > 0$. $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \{-2, 0, 2\}$. Z twierdzenia o ścisłej monotoniczności wynika natychmiast, że na półprostej $(-\infty, 0>$ funkcja f jest ściśle malejąca, a na półprostej $<0, \infty)$ – ściśle rosnąca. Jej najmniejszą wartością jest więc liczba $f(0) = 0$. W punktach -2 i 2 funkcja nie ma lokalnych ekstremów, choć pochodna w nich zeruje się.

Przykład 4.

Znaleźć maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół jego przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie:



a) Wyznaczenie funkcji objętości.

Niech a, b, c oznaczają boki trójkąta, przy czym c to przeciwprostokątna. Bryła, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta wokół boku c to dwa stożki złączone podstawami. Promieniem wspólnej podstawy obu stożków jest wysokość h_c danego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną c. Z wzorów na pole trójkąta: $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ wynika, że $h_c = \frac{ab}{c}$. Suma wysokości tych stożków jest równa c. Stąd wnioskujemy, że suma ich objętości jest równa $V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot c = \frac{\pi(ab)^2}{3c}$.

Wiemy, że $a^2 + b^2 = c^2$ (tw. Pitagorasa) i $a + b + c = 1$ (dany obwód trójkąta). Wobec tego $2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = (1-c)^2 - c^2 = 1 - 2c$.

b) Objętość jako funkcja zmiennej c i jej pochodna.

Zachodzą więc wzory $V = V(c) = \frac{\pi(1-2c)^2}{12c} = \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{c} - 4 + 4c\right)$ i $V'(c) = \frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{c^2} + 4\right)$.

c) Szukamy maksimum objętości.

Wynika stąd, że $V'(c) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \pm\frac{1}{2}$, zatem kandydatami na punkt, w którym funkcja V przyjmuje swą największą wartość są $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$.

Ponieważ c jest długością boku trójkąta, więc $c > 0 > -\frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ też nie wchodzi w grę, bo wtedy byłaby spełniona równość $a + b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = c$, wbrew temu, że: suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego. Oznacza to, że pochodna funkcji V jest różna od 0 w każdym punkcie nieznanej nam jeszcze dziedziny, zatem funkcja V jest ściśle monotoniczna na każdym przedziale zawartym w swej dziedzinie. Musimy więc znaleźć dziedzinę funkcji V. Liczby a,b,c mają być bokami trójkąta prostokątnego o obwodzie 1. Muszą więc być dodatnimi rozwiązaniami układu równań: $a^2 + b^2 = c^2$, $a + b = 1 - c$. Warunek ten jest też dostateczny: jeśli $a, b, c > 0$ i $a^2 + b^2 = c^2$, to $(a+b)^2 > a^2 + b^2 = c^2$, zatem $a + b > c$ i oczywiście $a + c > c > b$ oraz $b + c > c > a$. Oznacza to, że z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt, oczywiście prostokątny. Układ równań równoważny jest następującemu:

$$a + b = 1 - c,\ ab = \frac{(1-c)^2 - c^2}{2} = \frac{1}{2} - c.$$

Liczby a i b są więc pierwiastkami równania kwadratowego $t^2 - (1-c)t + \frac{1}{2} - c = 0$.

d) Jakie wartości może przyjmować c?

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, by to równanie miało dodatnie pierwiastki dla dodatniej wartości parametru c, jest $0 < c < \frac{1}{2}$ oraz

$$0 \le \Delta = (1-c)^2 - 4\left(\frac{1}{2} - c\right) = -1 + 2c + c^2 = (c+1)^2 - 2$$

czyli $\sqrt{2} - 1 \le c < \frac{1}{2}$. Z tej nierówności wynika, że $V'(c) = \frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{c^2} + 4\right) < 0$, a to oznacza, że funkcja V maleje na przedziale $<-\sqrt{2}-1, \frac{1}{2})$. Wobec tego największą wartością funkcji V jest liczba $V\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}{12\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{12\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2}-1\right)^3 = \frac{\pi}{12}\left(5\sqrt{2}-7\right) \approx 0,02.$

Dla $c = \sqrt{2} - 1$ otrzymujemy trójkąt równoramienny, bo $\Delta = 0$, więc pierwiastki równania kwadratowego $x^2 - (1-c)x + \frac{1}{2} - c = 0$, czyli liczby a i b są równe. Dodajmy jeszcze, że w zadaniu nie wymagano oszacowania największej objętości.

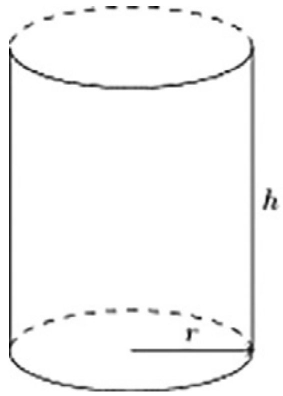
Komentarz. Ten przykład powinien przekonać uczniów i nauczycieli o konieczności zwracania uwagi na dziedzinę funkcji – w tym zadaniu to nie jest czynność rutynowa. Bez znalezienia dziedziny nie da się znaleźć bryły o największej objętości. Omawiałem to zadanie wielokrotnie na ćwiczeniach ze studentami i jeszcze się nie zdarzyło, by studenci chcieli, aby objętość V potraktować np. jako funkcję zmiennej a.

Skorzystalibyśmy wtedy z następującego wzoru $V = V(a) = \frac{\pi a^2 (1-2a)^2}{6(1-a)\left(1-2a+2a^2\right)}$.

Maksimum osiągane byłoby w punkcie wewnętrznym dziedziny funkcji V, czyli przedziału $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, mianowicie w punkcie $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, zatem w punkcie zerowania się pochodnej funkcji V. Byłoby mniej kłopotu z dziedziną funkcji, za to więcej z obliczeniami. Często studenci nie potrafili stwierdzić, że ponieważ funkcja ma niezerową pochodną na przedziale, to jest na nim monotoniczna. Wydawało im się, że w obliczeniach był błąd, bo skoro w jakimś punkcie ma być maksimum, to pochodna musi się tam zerować, zapominając, że to twierdzenie mówi o punktach wewnętrznych dziedziny.

Przykład 5.
Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Rozwiązanie.



Niech $r>0$ oznacza promień podstawy walca, a h – jego wysokość. Zachodzi wtedy wzór $P=2\pi r^2+2\pi rh$. Wobec tego $h=\frac{P-2\pi r^2}{2\pi r}$. Jest jasne, że wysokość walca jest liczbą dodatnią, zatem $P>2\pi r^2$, czyli $0<r<\sqrt{\frac{P}{2\pi}}$.

Mamy więc $V(r)=\pi r^2\,\frac{P-2\pi r^2}{2\pi r}=\frac{1}{2}\left(rP-2\pi r^3\right)$. Zachodzi równość $V'(r)=\frac{1}{2}\left(P-6\pi r^2\right)$.

Jedynym punktem przedziału $\left(0,\sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$, w którym ta pochodna jest równa 0 jest liczba $\sqrt{\frac{P}{2\pi}}$. Jeśli $0<r<\sqrt{\frac{P}{2\pi}}$, to $V'(r)>0$, a jeżeli $\sqrt{\frac{P}{6\pi}}<r<\sqrt{\frac{P}{2\pi}}$, to $V'(r)<0$.

Wobec tego z twierdzenia o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnych wynika, że V jest ściśle rosnąca na przedziale otwarto–domkniętym $(0,\sqrt{P/6\pi}\rangle$.

Wobec tego, jeśli $0<r<\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, to $V(r)<V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)$.

Na przedziale domknięto–otwartym $\langle\sqrt{P/6\pi},0)$ funkcja V jest ściśle malejąca, więc $V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)>V(r)$ dla każdej liczby $r\in\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}},\sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$. Udowodniliśmy w ten sposób, że największą wartością funkcji V jest liczba $V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)=\frac{1}{2}\left(P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}-2\pi\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)^3\right)=\frac{P}{3}\cdot\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, promieniem podstawy tego walca jestliczba $\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, a jego wysokością – liczba $2\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$.

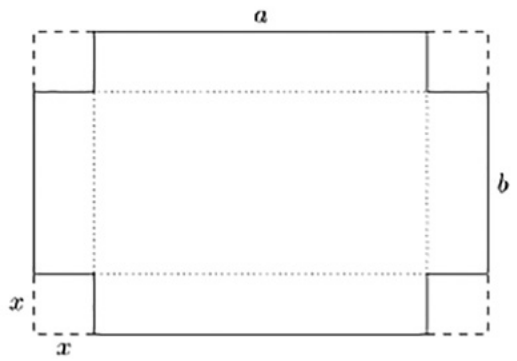
Przykład 6.

Niech $a > b >$ będą liczbami rzeczywistymi. Niech P oznacza prostokąt, którego jeden bok ma długość a, a drugi b. Z prostokąta P wycinamy cztery kwadraty o boku

$x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$, zawierające cztery wierzchołki P tak, że pole P zmniejsza się o $4x^2$. Następnie

zaginamy „wystające" części powstałego dwunastokąta (niewypukłego) tak, by powstało pudełko o wymiarach $a-2x$, $b-2x$, x. Dla jakiego x pojemność otrzymanego pudełka będzie największa?

Rozwiązanie.



Niech $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ będzie pojemnością pudełka. V jest funkcją ciągłą, a nawet różniczkowalną w każdym punkcie swej dziedziny. Z punktu widzenia pojemności

pudełka dziedziną funkcji V jest przedział $\left(0, \frac{b}{2}\right)$.

Spełniona jest równość $V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Ponieważ

$\Delta = \left(4(a+b)\right)^2 - 4 \cdot 12 \cdot ab = 16\left((a+b)^2 - 3ab\right) = 16\left(a^2 - ab + b^2\right) \geq 16x^2 > 0$, więc równanie kwadratowe $12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0$ ma dwa pierwiastki, ale nie wiadomo,

czy znajdują się one w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. Ponieważ sumą pierwiastków jest liczba

$\frac{4(a+b)}{12} > 0$, a iloczynem liczba $\frac{ab}{12} > 0$, więc obie liczby $\frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$

są dodatnie. Mamy

$$\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} = \frac{(a+b)^2 - \left(a^2-ab+b^2\right)}{6\left(a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)} = \frac{ab}{2\left(a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)} < \frac{b}{2},$$

bo $a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}>a$. Teraz zauważmy, że $\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\geq\frac{a+b+\sqrt{b^2}}{6}\geq\frac{b}{2}$.

Wobec tego, jeśli $0<x<\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$, to $V'(x)>0$,

a jeśli $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}<x<\frac{b}{2}$, to $V'(x)<0$. Wykazaliśmy, że na przedziale

$\left(0,\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right\rangle$, funkcja V rośnie, więc jeżeli $0<x<\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$,

to $V(x)<V\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)$, a na przedziale $\left\langle\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6},\frac{b}{2}\right)$ funkcja

V maleje, zatem jeśli $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}<x<\frac{b}{2}$, to $V\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)>V(x)$.

Stąd wynika, że największą wartością funkcji V jest liczba $V\left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right)$,

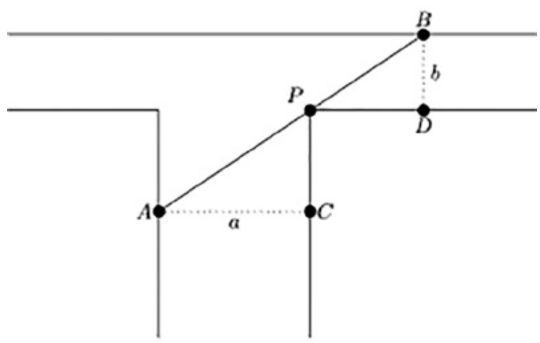
zatem bok kwadratu powinien mieć długość $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

Uwaga. Można np. przyjąć $a=b=4$ albo $a=5$ i $b=8$.

Przykład 7.

Jakiej długości statek może zakręcić z kanału o szerokości $a>0$ do prostopadłego doń kanału o szerokości $b>0$? Zakładamy, że oba kanały są bardzo długie.

Rozwiązanie.



Będziemy zaniedbywać szerokość statku. Niech P oznacza punkt, w którym brzegi kanałów się łączą (z P wychodzą dwie prostopadłe półproste, jedna jest brzegiem pierwszego kanału, a druga – drugiego). Prowadzimy przez P prostą, która przecina drugi brzeg pierwszego kanału w punkcie A, a drugi brzeg drugiego kanału – w punkcie B. Jasne jest, że długość statku musi być mniejsza niż długość odcinka AB. Niech C będzie rzutem prostokątnym A na drugi brzeg pierwszego kanału, a D – rzutem prostokątnym B na drugi brzeg drugiego kanału. Niech $x = |CP|$. Z podobieństwa trójkątów PAC i PBD wynika, że $\frac{x}{a} = \frac{b}{|BD|}$, więc $|BD| = \frac{ab}{x}$.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|BD| = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{\frac{a^2b^2}{x^2} + b^2}$. Długość statku musi więc być mniejsza od $\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{\frac{a^2b^2}{x^2} + b^2}$ dla każdego $x > 0$. Mamy więc znaleźć najmniejszą wartość funkcji f zdefiniowanej wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{\frac{a^2b^2}{x^2} + b^2}$.

Jej pochodna to $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{\frac{a^2b^2}{x^3}}{\sqrt{\frac{a^2b^2}{x^2} + b^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{a^2b}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x^3 - a^2b}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Mamy $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \sqrt[3]{a^2b}$. Jasne jest, że na półprostej $\left(\sqrt[3]{a^2b}, \infty\right)$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$ (więc f jest ściśle rosnąca na $\left\langle\sqrt[3]{a^2b}, \infty\right)$), a na odcinku $\left(0, \sqrt[3]{a^2b}\right)$ nierówność $f'(x) < 0$ (więc f jest ściśle malejąca na przedziale $\left(0, \sqrt[3]{a^2b}\right\rangle$, a to oznacza, że w punkcie $\sqrt[3]{a^2b}$ funkcja f przyjmuje swą najmniejszą wartość. Ta najmniejsza wartość funkcji f, czyli liczba

$$\sqrt{a^{4/3}b^{2/3} + a^2} + \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^{4/3}b^{2/3}} + b^2} = \sqrt{a^{4/3}b^{2/3} + a^2} + \sqrt{a^{2/3}b^{4/3} + b^2} = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$$

to górne ograniczenie długości statku, który w rzeczywistości musi być jeszcze krótszy, bo przecież zaniedbaliśmy jego szerokość, nie przejmowaliśmy się kształtem itp.

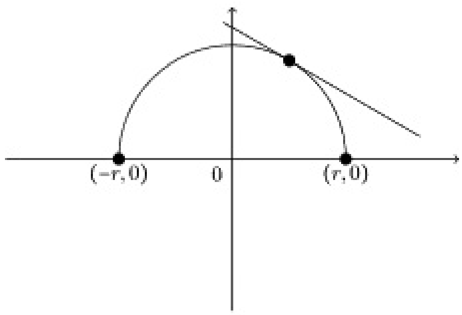
Przykład 8.

Dowieść, że jeśli $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ i $a \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$, to $x^a > 1 + a(x-1)$.

Niech $f(x) = x^a - 1 - a(x-1)$. Mamy $f'(x) = ax^{a-1} - a = a\left(x^{a-1} - 1\right)$. Wynika stąd łatwo, że $f'(x) > 0$ dla $x > 1$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (0,1)$. Funkcja f jest więc ściśle malejąca na przedziale $(0,1\rangle$ i ściśle rosnąca na półprostej $\langle 1,\infty)$, a stąd wynika, że $f(1) = 0$ jest jej najmniejszą wartością, więc $f(x) > 0$ dla każdego $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$.

Czytelnikowi pozostawiamy dowód nierówności $x^a < 1 + a(x-1)$ przy założeniu $0 < a < 1$, $1 \neq x > 0$.

Przykład 9.



Niech $r > 0$ i $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ dla $x \in \langle -r, r\rangle$. Wtedy $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ dla $x \in (-r, r)$, w punktach $-r$ i r funkcja f nie ma skończonej pochodnej. Jeśli $-r < a < r$, to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\left(a, \sqrt{r^2 - x^2}\right)$ przyjmuje taką postać $y = \dfrac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}}(x-a) + \sqrt{r^2 - a^2}$. Prosta ta jest prostopadła do prostej o współczynniku kierunkowym $\dfrac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$. Oznacza to, że w wypadku wykresu funkcji f, który jest półokręgiem, definicja stycznej podana wyżej pokrywa się z klasyczną definicją stycznej do okręgu, np. jako prostopadłej do promienia.

Rachunek prawdopodobieństwa

Trzy pierwsze przykłady ilustrują działania kombinatoryczne, w których zastosowano reguły dodawania i mnożenia. Kolejne dotyczą rachunku prawdopodobieństwa, a w szczególności prawdopodobieństwa warunkowego oraz omawiają paradoks Simpsona.

Przykład 1.
Liczby $1,\ldots,10$ ustawiamy w ciąg 10-elementow, taki, że żadne dwie liczby się nie powtarzają. Na ile różnych sposobów można ustawić te liczby tak, żeby żadne dwie liczby parzyste nie stały obok siebie.

Rozwiązania:
Pierwszy sposób. Ustawmy najpierw liczby nieparzyste. Liczby parzyste możemy wstawiać między liczbami nieparzystymi albo na początku, albo na końcu ciągu. Daje to łącznie 6 miejsc do wstawienia liczb parzystych. Liczb jest 5, czyli mamy $\binom{6}{5}=6$ możliwości.

Każda konfiguracja liczb parzystych i nieparzystych daje łącznie $5!^2$ możliwości, czyli ostatecznie jest 86400 możliwości.

Drugi sposób. Zauważamy, że jeśli trzy liczby nieparzyste stoją obok siebie, to zawsze znajdziemy parę liczb parzystych stojących obok siebie. Podobnie, jeśli dwie pary liczb nieparzystych stoją obok siebie, to zawsze będzie stała obok siebie para liczb nieparzystych. W związku z tym mamy dwie sytuacje: albo jest dokładnie jedna para liczb nieparzystych stojących obok siebie, albo nie ma żadnej.

- Jeśli jest dokładnie jedna para liczb nieparzystych stojących obok siebie, to musi ona stać na miejscach $2,3$, $4,5$, $6,7$ lub $8,9$: uzyskujemy wtedy konfigurację PNNPNPNPNP, aż do PNPNPNPNNP. Łącznie mamy 4 możliwości. Podkreślamy, że para liczb nieparzystych nie może stać na miejscu np. $3,4$, bo wtedy nie zmieszczą się wszystkie liczby parzyste.
- Jeśli nie ma ani jednej pary liczb nieparzystych stojących obok siebie, mamy dwie konfiguracje: PNPNPNPNPN i NPNPNPNPNP.

Łącznie znaleźliśmy 6 konfiguracji. Każdej konfiguracji odpowiada $5!=120$ możliwości permutacji zbioru liczb nieparzystych $\{1,3,5,7,9\}$ i $5!=120$ możliwości permutacji zbioru liczb parzystych $\{2,4,6,8,10\}$.

Odpowiedzią jest więc $6\cdot 120^2=6\cdot 14400=86400$.

Przykład 2.
W urnie znajduje się pięć białych kul ponumerowanych liczbami od 1 do 5 oraz sześć czarnych kul ponumerowanych liczbami od 1 do 6. Na ile sposobów możemy wyciągnąć dwie białe kule i trzy czarne kule tak, by wszystkie numery na kulach były różne? Kolejność wyciągania nie ma znaczenia, czyli nie rozróżniamy konfiguracji różniących się permutacją.

Rozwiązanie. Mamy dwie rozłączne sytuacje:
- jedna z wylosowanych czarnych kul ma numer 6;
- żadna z wylosowanych czarnych kul nie ma numeru 6.

W przypadku (a) czarne kule możemy wybrać na $\binom{5}{2}=10$ sposobów. Na białe kule pozostają trzy możliwości (bo dwa numery zabrały nam kule czarne o numerach $1-5$).

Tak więc mamy $\binom{3}{2}=3$ możliwości dla białych kul i łącznie 30 możliwości.

W przypadku (b) czarne kule wybieramy na $\binom{5}{3}=10$ sposobów. Teraz białe kule są wyznaczone jednoznacznie, bo musimy wybrać dwie kule z dwuelementowego zbioru. Łącznie mamy $30+10=40$ możliwości.

Przykład 3.
Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3 lub przez 13?

Rozwiązanie. Liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3 jest 300. Widzimy to biorąc możliwą parametryzację tego zbioru $\{102+3k\}$, i wtedy $k \in \{0,1,\dots,299\}$.

Liczb trzycyfrowych podzielnych przez 13 jest 69: są one postaci $104+13k$, gdzie $0 \le k \le 68$.

Mamy jeszcze liczby podzielne przez 39. Jest ich 23 i są to liczby postaci $117+39k$ dla $0 \le k \le 22$.

Aby otrzymać rozwiązanie zadania, dodajemy liczbę liczb podzielnych przez 3 do liczby liczb podzielnych przez 13 i odejmujemy liczby podzielne przez 39, które policzyliśmy dwukrotnie. Odpowiedzią jest $69+300-23=346$.

Przykład 4.
Rzucamy dwa razy monetą. Wiadomo, że przynajmniej raz wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej raz wypadła reszka?

Rozwiązanie. Przestrzeń zdarzeń składa się z czterech elementów: OO, OR, RO i RR, gdzie „R" oznacza reszkę a „O" – orła. Niech A oznacza zdarzenie, że wypadła co najmniej jedna reszka, B oznacza, że wypadł co najmniej jeden orzeł.

Mamy $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, zatem $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}$.

Przykład 5. *Paradoks Simpsona*
W styczniu w pewnych dwóch miejscowościach A, B panowała epidemia grypy. Wiadomo, że odsetek chorych mężczyzn oraz odsetek chorych kobiet były większe w mieście A. Czy wynika stąd, że odsetek chorych był większy w mieście A?

Rozwiązanie. Zawarte w tytule słowo „paradoks" sugeruje, że odpowiedź będzie nieintuicyjna. Spróbujmy zatem znaleźć sytuację, w której odsetek chorych mężczyzn i chorych kobiet w mieście A jest większy, ale odsetek chorych jest większy w mieście B.

Poszukajmy możliwej sytuacji. Na przykład: w mieście A jest jedna kobieta i jest ona chora. W mieście B może być na przykład 99 kobiet i 98 jest chorych.

Aby rozumowanie się udało, musimy mieć mało mężczyzn w mieście B, powiedzmy, że jest 1 mężczyzna i jest on zdrowy. W mieście A może być na przykład 99 mężczyzn. Warunki zadania będą spełnione, jeśli będzie co najmniej jeden chory mężczyzna w mieście A. Przypuśćmy, że tak jest. Nasze rozważania podsumujemy w tabelce.

	Miasto A	Miasto B
Kobiety	1	99
Chore kobiety	1	98
Odsetek chorych kobiet	100%	~ 99%
Mężczyźni	99	1
Chorzy mężczyźni	1	0
Odsetek chorych mężczyzn	~ 1%	0%
Mieszkańcy łącznie	100	100
Chorzy mieszkańcy	2	98
Odsetek chorych mieszkańców	2%	98%

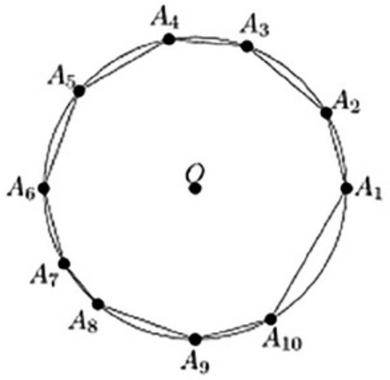
Z naszych rozważań wynika, że może się zdarzyć, iż odsetek chorych w mieście B jest większy.

Dowody

Przykład 1.

Udowodnić, że jeśli punkty A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_{2n-1}$, A_{2n} są kolejnymi wierzchołkami $2n$–kąta wpisanego w okrąg, to suma kątów wewnętrznych tego wielokąta o wierzchołkach A_1, $A_3, \ldots, A_{2n-1}$ równa jest sumie pozostałych kątów wewnętrznych, czyli kątów wewnętrznych o wierzchołkach A_2, $A_4, \ldots, A_{2n}$.

Rozwiązanie.



Niech α_1 oznacza długość tego łuku o końcach A_j i A_{j+1}, którego wnętrze nie zawiera żadnego spośród punktów A_1, A_2, A_3, A_4, $A_5, \ldots, A_{2n}$, przyjmujemy, że $A_{2n+1} = A_1$. Jasne jest, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n} = 2\pi r$, gdzie r oznacza promień okręgu. Kąt o wierzchołku A_1, to kąt $\angle A_{2n}A_1A_2$ wpisany w okrąg. Jest on oparty na tym łuku o końcach A_2, A_{2n}, który zawiera w swym wnętrzu wszystkie wierzchołki z wyjątkiem A_{2n}, A_1, A_2, więc na łuku o długości $\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n-1} = 2\pi r - \alpha_{2n} - \alpha_1$.
Kąt o wierzchołku A_3, to kąt wpisany $\angle A_2A_3A_4$. Jest on oparty na tym łuku o końcach A_2, A_4, który zawiera w swym wnętrzu wszystkie wierzchołki z wyjątkiem $A_2A_3A_4$, więc na łuku o długości $2\pi r - \alpha_2 - \alpha_3$.
Kontynuujemy. W końcu otrzymamy łuki o sumie długości
$$2\pi r - \alpha_{2n} - \alpha_1 + 2\pi r - \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots + 2\pi r - \alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1} = 2n\pi r - 2\pi r = 2(n-1)\pi r.$$
Jest jasne, że ten sam wynik otrzymamy, zająwszy się kątami o wierzchołkach $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$, co dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Przykład 2.

Udowodnić, że jeśli punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są kolejnymi wierzchołkami czworokąta wypukłego Q oraz sumy par kątów przeciwległych są równe, to punkty A_1, A_2, A_3, A_4 leżą na jednym okręgu. Czy twierdzenie jest prawdziwe dla sześciokąta, tzn. czy z tego, że w sześciokącie wypukłym $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ suma kątów wewnętrznych o wierzchołkach A_1, A_3, A_5 równa jest sumie kątów wewnętrznych o wierzchołkach A_2, A_4, A_6 wynika, że wierzchołki $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ leżą na jednym okręgu?

Rozwiązanie. Ponieważ czworokąt Q jest wypukły, więc jego przekątne składają się w całości z punktów czworokąta. Mamy też
$\angle A_4A_1A_2 + \angle A_2A_3A_4 = 180^\circ = \angle A_2A_4A_3 + \angle A_4A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4$, więc
$\angle A_4A_1A_2 = \angle A_2A_4A_3 + \angle A_4A_2A_3$, a stąd wynika, że $\angle A_4A_1A_2 > \angle A_2A_4A_3$ oraz
$\angle A_4A_1A_2 > \angle A_4A_2A_3$.

Niech T_4 będzie punktem leżącym na stycznej do okręgu C opisanego na trójkącie $A_4A_1A_2$ przy czym punkty T_4 i A_1 leżą po różnych stronach prostej A_4A_2.

Analogicznie definiujemy punkt T_2. Kąt między styczną i cięciwą równy jest kątowi wpisanemu w okrąg opartemu na tej cięciwie, czyli $\angle T_4A_4A_2 = \angle A_4A_1A_2 = \angle T_2A_2A_4$. Wynika stąd, że na półprostej A_4A_3 leży taki punkt P_4, że odcinek otwarty A_4P_4 znajduje się wewnątrz okręgu C. Jeśli punkt A_3 leży na okręgu C, to twierdzenie jest udowodnione.

Teoretycznie może zdarzyć się, że A_3 leży wewnątrz C. Przedłużamy wtedy odcinek A_4A_3 do przecięcia z okręgiem C w punkcie $K \neq A_4$. Czworokąt $A_4A_1A_2K$ jest wpisany w okrąg C. Wobec tego $\angle A_4A_1A_2 + \angle A_2KA_4 = 180^\circ$. Mamy też $\angle A_4A_3A_2 = \angle A_3KA_2 + \angle A_3A_2K$, więc $\angle A_4A_3A_2 > \angle A_3KA_2$. To przeczy temu, że $\angle A_4A_1A_2 + \angle A_2A_3A_4 = 180^\circ = \angle A_4A_1A_2 + \angle A_2KA_4$. Oznacza to, że punkt A_3 musi znaleźć się na zewnątrz okręgu C. Odcinki A_4A_3 i A_2A_3 przecinają więc okrąg C w punktach, które oznaczamy odpowiednio przez K i L. Czworokąt $A_1A_2KA_4$ jest wpisany w okrąg C,
więc $\angle A_4A_1A_2 + \angle A_2KA_4 = 180^\circ = \angle A_4A_1A_2 + \angle A_2A_3A_4 = 180^\circ$,
więc $\angle A_2KA_4 = 180^\circ = \angle A_2A_3A_4 = 180^\circ$, co nie jest możliwe,
bo $\angle A_2KA_4 = \angle A_2A_3K + \angle A_3A_2K > \angle A_2A_3K = \angle A_2A_3A_4$.

Udowodniliśmy, że punkt A_3 nie może znajdować się na zewnątrz okręgu C. Dowód został zakończony.

Odpowiedź na drugie pytanie jest negatywna. Jeśli sześciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jest foremny, to jest wpisany w okrąg. Niech B_3, B_4, B_5 oznaczają takie punkty

leżące na półprostych A_2A_3, A_1A_4 i A_6A_5, że $2|A_2A_3| = |A_2B_3|$, $\frac{3}{2}|A_1A_4| = |A_1B_4|$

i $2|A_6A_5| = |A_6B_5|$. Sześciokąty $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ i $A_1A_2B_3B_4B_5A_6$ mają takie same kąty, a wierzchołki B_3, B_4, B_5 leżą na zewnątrz jedynego okręgu przechodzącego przez punkty A_6, A_1, A_2, więc na $A_1A_2B_3B_4B_5A_6$ okręgu opisać nie można.

Przykład 3.

Udowodnić, że $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\ge 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z.

Rozwiązanie. Potraktujemy wyrażenie jako wielomian kwadratowy zmiennej x, którego współczynniki zależą od parametrów x, y, z. Mamy więc

$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=x^2+(y+z)x+y^2+z^2+yz.$

$\Delta=(y+z)^2-4\left(y^2+z^2+yz\right)=-3y^2-2yz-3z^2=-2\left(y^2+z^2\right)-(y+z)^2\le 0,$

przy czym ta nierówność jest ostra z jednym wyjątkiem: $y=z=0$. Wobec tego, jeśli $(y,z)\ne(0,0)$, to wielomian nie ma pierwiastków rzeczywistych, zatem jego wartościami są liczby jednego znaku, dodatnie, bo dodatni jest współczynnik przy x^2. Jeśli $y=0=z$, to mamy do czynienia z wielomianem x^2, którego wartości są nieujemne. Zadanie zostało rozwiązane.

To samo rozwiązanie można zapisać inaczej, można sprowadzić wielomian kwadratowy do postaci kanonicznej:

$$x^2+(y+z)x+y^2+z^2+yz=\left(x+\frac{y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2+y^2+z^2+yz=\left(x+\frac{y+z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{4}z^2+\frac{1}{2}yz=\left(x+\frac{y+z}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(y^2+z^2\right)+\frac{1}{4}(y+z)^2\ge 0.$$

Można też tak:

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2+y^2+2yz+z^2+z^2+2zx+x^2\right)=\frac{1}{2}((x+y)^2+(y+z)^2+\left(z+x)^2\right)\ge 0.$$

Pokazaliśmy trzy sposoby. Ostatni jest najzręczniejszy, ale też wymaga pomysłu, a dwa pierwsze polegają na zastosowaniu „szkolnej" wiedzy.

Przykład 4.

Udowodnić, że jeśli n jest liczbą naturalną, to liczba n^2+3n+5 nie jest podzielna przez 121.

Rozwiązanie. Widzimy, że $121=11^2$, więc ważna dla nas będzie podzielność przez 11. Mamy $n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$. Spróbowaliśmy zapisać wyrażenie jako iloczyn liczb o różnicy 11, ale udało się tylko częściowo. Ponieważ 33 dzieli się przez 11, więc jeśli liczba $n^2+3n+5==(n+7)(n-4)+33$ dzieli się bez reszty przez 11, to również liczba $(n+7)(n-3)$ jest podzielna przez 11. Liczba 11 jest pierwsza, więc jest dzielnikiem jednej z liczb $n+7$, $n-4$. Wtedy jednak dzieli też drugą z nich. Wobec tego: jeśli liczba n^2+3n+5 jest podzielna przez 11, to liczba $(n+7)(n-4)$ jest podzielna przez 121, więc resztą z dzielenia liczby n^2+3n+5 przez 121 jest 33.

Przykład 5.
Udowodnimy, że jeśli $n \geq 2$ jest liczbą całkowitą, to $\sqrt[n]{n}$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie. Liczba $\sqrt[n]{n}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^n - n$. Z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu o całkowitych współczynnikach wynika, że

jeśli nieskracalny ułamek $\dfrac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^n - n$, to mianownik q jest

dzielnikiem współczynnika kierującego 1, zatem $q = 1$. Oznacza to, że $\sqrt[n]{n}$ musi być liczbą całkowitą. Zachodzi nierówność $\sqrt[n]{n} > 1$. Zachodzi też nierówność $\sqrt[n]{n} < 2$, którą wypada uzasadnić. Jest ona równoważna nierówności $n < 2^n$. Oczywiście $2 < 2^2$. Jeśli dla pewnej naturalnej liczby $n > 1$ zachodzi nierówność $n < 2^n$, to $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n = n + n > n + 1$. Z prawdziwości nierówności dla $n = 2$ wynika prawdziwość dla $2 + 1 = 3$, stąd jej prawdziwość dla $n = 4 = 3 + 1$ itd. Wobec tego mamy $1 < \sqrt[n]{n} < 2$, co dowodzi, że liczba $\sqrt{}$ nie jest całkowita, więc nie jest też wymierna.

Dowody w geometrii analitycznej

Przykład 6.
Udowodnić, że jeśli $a \neq 0$, to wykres funkcji ax^2 (paraboli P) składa się z punktów równo oddalonych od pewnego ustalonego punktu F (zwanego ogniskiem) i od pewnej ustalonej prostej d (zwanej kierownicą).

Rozwiązania:
Sposób 1.
Najpierw założymy, że d jest prostopadła do osi symetrii P i że F leży na tej osi symetrii. Niech więc $F = (0, f)$ i niech d będzie dana równaniem $y = \delta$. Wtedy dla każdego x ma zachodzić równość $x^2 + (ax^2 - f)^2 = (ax^2 - \delta)^2$, czyli kwadrat odległości punktu (x, ax^2) od punktu F ma być równy kwadratowi odległości punktu (x, ax^2) od prostej $y = \delta$. Równanie $x^2 + (ax^2 - f)^2 = (ax^2 - \delta)^2$ po uproszczeniu przybiera postać $x^2 - 2afx^2 + f^2 = -2a\delta x^2 + \delta^2$. Ma ono zachodzić dla każdej liczby x. Przyjmując $x = 0$ otrzymujemy ^{2} ^{2}, więc $\delta = \pm f$. Wobec tego $x^2(1 - 2af + 2a\delta) = 0$ dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$. Stąd natychmiast wynika, że $1 - 2a(f - \delta) = 0$, co wyklucza równość

$f = \delta$, a to oznacza, że $\delta = -f$, więc $1 = 4af$, czyli $f = \dfrac{1}{4a}$ i wobec tego $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$,

zaś równaniem kierownicy jest $y = -\dfrac{1}{4a}$.

Sposób 2. (dłuższy)
Załóżmy, że $F=(p,q)$ i że równaniem prostej d jest $Ax+By+C=0$, więc $A^2+B^2>0$ (czyli co najmniej jedna z liczb A,B jest różna od 0). Kwadraty odległości punktu $\left(x,ax^2\right)$

od F i od d są równe, czyli $(x-p)^2+(ax^2-q)^2=\dfrac{(Ax+aBx^2+C)^2}{A^2+B^2}$.

Po podniesieniu do kwadratu, pomnożeniu otrzymanej równości przez A^2+B^2 i przeniesieniu wszystkiego na jedną stronę otrzymujemy
$x^4\left(a^2\left(A^2+B^2\right)-a^2B^2\right)-2aABx^3+x^2\left(\left(A^2+B^2\right)(1-2aq)-A^2-2aBC\right)-2x\left(p\left(A^2+B^2\right)+AC\right)+\left(p^2+q^2\right)\left(A^2+B^2\right)-C^2=$ Ta równość zachodzi dla każdego x. Oznacza to, że współczynniki przy kolejnych potęgach x są zerami. Wynika to stąd, że wielomian k–tego stopnia ma co najwyżej k pierwiastków rzeczywistych (lewa strona nie jest więc wielomianem czwartego stopnia zmiennej x, więc $a^2\left(A^2+B^2\right)-a^2B=0$ itd.).

Ponieważ $a\neq 0$ i $a^2\left(A^2+B^2\right)-a^2B=0$, więc $A=0$, co oznacza, że równanie prostej

d wygląda tak: $y=-\dfrac{C}{B}$, więc jest to prosta pozioma. Wiemy, że zachodzi równość

$0=p\left(A^2+B^2\right)+AC=pB^2$, zatem $p=0$. Wiemy, że zachodzą równości
$0=\left(A^2+B^2\right)(1-2aq)-A^2-2aBC=B^2(1-2aq)-2aBC=B\left(B-2a\left(qB+C\right)\right)$, zatem
$0\neq B=2a\left(qB+C\right)$ i $0=\left(p^2+q^2\right)\left(A^2+B^2\right)-C^2=q^2B^2-C^2=\left(qB+C\right)\left(qB-C\right)$,

i wobec tego $qB=C$. Mamy teraz $0=B-2a\left(qB+C\right)=B-4aC$, więc — .

Oznacza to, że równaniem prostej d jest $y=-\dfrac{C}{B}=-\dfrac{1}{4a}$ i $q=\dfrac{C}{B}=\dfrac{1}{4a}$, zatem $F=\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$.

Dłuższy sposób wymagał więcej pracy, ale za to udowodniliśmy, że istnieje dokładnie jedna para F,d. Rozumowanie z pierwszego sposobu tego wyniku nie dało, wskazaliśmy jedną parę, nie rozważając innych możliwości.

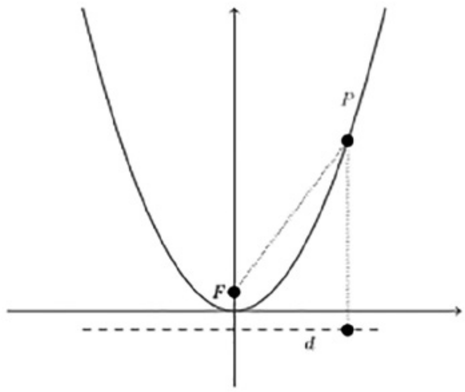
Przykład 7.
Udowodnić, że przez każdy punkt paraboli o równaniu $y=ax^2$, gdzie $a\neq 0$, przechodzą dokładnie dwie proste mające z tą parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, z których jest jedna równoległa do osi symetrii paraboli.

Rozwiązanie. Niech p będzie liczbą rzeczywistą. Punkt $P=\left(p,ap^2\right)$ leży na paraboli. Prosta $x=p$ przechodzi przez punkt P i jest to jedyny punkt tej prostej, który leży na paraboli. Załóżmy, że prosta o równaniu $y=Ax+B$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą $y=ax^2$. Wynika stąd, że równanie $Ax+B=ax^2$, czyli $ax^2-Ax-B=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i jest nim liczba p. Wobec tego $ap^2-Ap-B=0$ oraz $(-A)^2+4aB=0$, więc $0=A^2+4a\left(ap^2-Ap\right)=A^2-4aAp+4a^2p^2=(A-2ap)^2$, zatem $A=2ap$. Wobec tego $B=ap^2-2ap^2=-ap^2$. Równanie szukanej prostej to $y=2apx-ap^2$.

Rzeczywiście jedynym wspólnym punktem tej prostej i paraboli $y = ax^2$ jest $\left(p, ap^2\right)$ ($0 = ax^2 - 2apx + ap^2 = a(x-p)^2 \Leftrightarrow x = p$).

Uwaga. Prostą $y = 2apx - ap^2$ nazywamy styczną do paraboli $y = ax^2$ w punkcie $\left(p, ap^2\right)$.

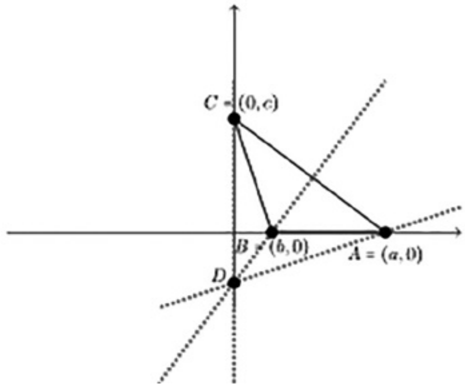
Przykład 8.



Niech $F = (0,1)$. Wtedy F jest ogniskiem paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ a prosta $y = -1$ jej kierownicą, co oznacza, że dla każdego x odległość punktu $X = \left(x, \frac{1}{4}x^2\right)$ od punktu F jest równa odległości punktu X od prostej $y = -1$. Udowodnimy, że dla każdego $p \in \mathbf{R}$ styczna do paraboli w punkcie $P = \left(p, \frac{1}{4}p^2\right)$, czyli prosta $y = \frac{p}{2}x - \frac{1}{4}p^2$ – poprzedni przykład, jest dwusieczną kąta między prostymi $x = p$ (pionowa) i prostą PF. Niech Q będzie rzutem punktu P na prostą $y = -1$, czyli punktem $(p, -1)$. Trójkąt FPQ jest równoramienny, dokładniej $|FP| = |PQ|$ (bo $p^2 + (\frac{1}{4}p^2 - 1)^2 = (\frac{1}{4}p^2 - (-1))^2$). Środkiem odcinka FQ jest punkt $M = \frac{1}{2}(F + Q) = \frac{1}{2}((0,1) + (p,-1)) = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, który leży na prostej $y = \frac{p}{2}x - \frac{1}{4}p^2$, więc środkowa MP jest zawarta w prostej $y = \frac{p}{2}x - \frac{1}{4}p^2$, która wobec tego jest dwusieczną kąta $\sphericalangle FPQ$.

Przykład 9.
Udowodnić, że proste zawierające wysokości trójkąta mają punkt wspólny.

Rozwiązanie.



Trójkąt ABC możemy umieścić w układzie współrzędnych w taki sposób, że punkty A, B znajdą się na osi OX, a wierzchołek C — na osi OY. Niech więc $A=(a,0)$, $B=(b,0)$ i $C=(0,c)$. Oczywiście możemy założyć, że $a<b$. Współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy $\frac{c-0}{0-a}=-\frac{c}{a}$. Wobec tego współczynnik kierunkowy prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka B jest równy $\frac{a}{c}$, a to oznacza, że równanie tej prostej można napisać tak: $y=\frac{a}{c}(x-b)$. Podobne rozumowanie prowadzi do wniosku, że prosta zawierająca wysokość z wierzchołka A opisana jest równaniem $y=\frac{b}{c}(x-a)$.

Pierwsza współrzędna punktu wspólnego tych prostych spełnia więc równanie $\frac{a}{c}(x-b)=\frac{b}{c}(x-a)$, więc $(a-b)x=0$, a to oznacza, że $x=0$, więc że punkt wspólny tych dwu prostych leży na prostej $x=0$, a ta zawiera wysokość poprowadzoną z wierzchołka C.

Uwaga. Klasyczny dowód oparty jest na pomyśle polegającym na poprowadzeniu przez każdy z trzech wierzchołków trójkąta ABC prostej równoległej do przeciwległego boku. W wyniku tego, proste zawierające wysokości wyjściowego trójkąta okazują się być symetralnymi boków nowego trójkąta $A_1B_1C_1$ (A jest środkiem boku B_1C_1, podobnie B i C są środkami A_1C_1 i A_1B_1*). Symetralne boków A_1B_1 i B_1C_1 przecinają się w jednym punkcie, bo symetralna to zbiór punktów równo oddalonych od końców odcinka, zatem ich punkt wspólny jest równo oddalony od A_1 i B_1 oraz od B_1 i C_1, więc również od A_1 i C_1, a to oznacza, że ten* *punkt leży również na symetralnej boku* A_1C_1 *(punkt wspólny symetralnych boków trójkąta jest więc* środkiem *okręgu opisanego na trójkącie).*

Dzielenie liczb, dzielenie wielomianów

Popularna w szkołach metoda szukania największego wspólnego dzielnika liczb przez rozkład na czynniki pierwsze nie jest tak łatwa do zastosowania w trudniejszych przykładach, jak poniżej.

Przykład 10.
Udowodnić, że liczby $452\,261$ oraz $43\,553$ są względnie pierwsze.

Rozwiązanie. Mamy $452\,261 - 10 \cdot 43\,553 = 16\,731$. Stąd wynikają równości:
$\mathrm{NWD}(452\,261, 43\,553) = \mathrm{NWD}(43\,553, 16\,731) = \mathrm{NWD}(452\,261, 16\,731)$,
bo każdy wspólny dzielnik liczb $452\,261$ i $43\,553$ jest dzielnikiem liczby $16\,731$ itd. Wystarczy więc zająć się parą $43\,553, 16\,731$. Znów dzielimy z resztą: $43\,553 - 2 \cdot 16\,731 = 10\,091$.
Z tej równości wynika, że $\mathrm{NWD}(43\,553, 16\,731) = \mathrm{NWD}(16\,731, 10\,091)$.
Następnie korzystamy z równości $16\,731 - 10\,091 = 6640$, potem $10\,091 - 6\,640 = 3\,451$ i kolejno $6\,640 - 3\,451 = 3189$, $3\,451 - 3189 = 262$, $3189 - 12 \cdot 262 = 57$, $262 - 4 \cdot 57 = 34$, $57 - 34 = 23$, $34 - 23 = 11$, $= 23 - 2 \cdot 11 = 1$. Stąd wynika, że
$\mathrm{NWD}(43553,\ 16731) = \mathrm{NWD}(16731,\ 10091) = \mathrm{NWD}(10091,\ 6640) =$
$\mathrm{NWD}(6640,\ 3451) = \mathrm{NWD}(3451,\ 3189) = \mathrm{NWD}(3189,\ 262) = \mathrm{NWD}(262,\ 57) =$
$\mathrm{NWD}(57,\ 34) = \mathrm{NWD}(\ 34, 23) = \mathrm{NWD}(23, 11) = \mathrm{NWD}(11,\ 1) = 1$. Udowodniliśmy.

Uwaga dla miłośników rozkładania na czynniki pierwsze:

$$43553 = 97 \cdot 449, \qquad 452261 = 617 \cdot 733.$$

Przypomnijmy, jak można pisemnie dzielić (z resztą) liczby całkowite. Podzielimy 452261 przez 257.

$$
\begin{array}{ll}
\underline{1759} & \\
452261 : 257 & \\
\underline{257} & \\
1952 & \\
\underline{1799} & 7 \text{ x } 257 \ = \ 1799 \\
1536 & \\
\underline{1285} & 5 \text{ x } 257 \ = \ 1285 \\
2511 & \\
\underline{2313} & 9 \text{ x } 257 \ = \ 2313 \\
198 &
\end{array}
$$

W rezultacie $452261 = 1759 \cdot 257 + 198$ – ilorazem jest tu 1759, resztą z dzielenia jest 198.

Jeśli f i g są wielomianami, to istnieje dokładnie jedna taka para wielomianów q i r, że dla każdego x zachodzi równość $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ oraz $st(r)<st(g)$. Wielomian q zwany jest ilorazem z dzielenia f przez g, a wielomian r – resztą. Dzielenie wielomianów nie różni się istotnie od dzielenia liczb.

Przykład 11.

Niech $f(x)=3x^4-8x^3+7x^2+2$ oraz $g(x)=x+2$. Ponieważ dzielić będziemy przez wielomian stopnia 1, więc reszta będzie wielomianem stopnia mniejszego od 1, więc stałą. Iloraz q będzie wielomianem stopnia 3, więc możemy napisać $q(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$. Znajdziemy kolejno liczby b_3,b_2,b_1,b_0. Zapiszemy wykonane już dzielenie podobnie do dzielenia pisemnego liczb.

$$
\begin{array}{l}
\underline{\quad 3x^3-14x^2+35x-70} \\
3x^4-8x^3+7x^2+0x+2 \;:\; x+2 \\
\underline{3x^4+6x^3\qquad\quad} \\
\qquad -14x^3\;+\;7x^2 \\
\underline{\qquad -14x^3-28x^2} \\
\qquad\qquad\quad +35x^2+\;0x \\
\underline{\qquad\qquad\quad +35x^2+70x\;\ldots\ldots} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -70x\;+\;2 \\
\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad -70x-140} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 142
\end{array}
$$

Podzieliliśmy, możemy napisać:
$3x^4-8x^3+7x^2+2=\left(3x^3-14x^2+35x-70\right)(x+2)+142$ – ilorazem jest wielomian $3x^3-14x^2+35x-70$, a resztą liczba 142 (wielomian stopnia 0).

Można było postąpić inaczej. Szukamy takiego wielomianu $b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$ i takiej liczby r, że równość

$$3x^4-8x^3+7x^2+2=(x+2)\left(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\right)+r=$$
$$=b_3x^4+(2b_3+b_2)x^3+(2b_2+b_1)x^2+(2b_1+b_0)x+2b_0$$

zachodzi dla każdego x. Stąd wnioskujemy od razu, że $b_3=3$. Potem $2b_3+b_2=-8$, więc $b_2=-8-2b_3=-14$. Następnie $2b_2+b_1=7$, zatem $b_1=7-2(-14)=35$. Wreszcie $2b_1+b_0=0$, więc $b_0=-2\cdot 35=-70$. Jeszcze reszta $2b_0+r=2$, zatem $r=2-2(-70)=142$. Widać, że powtarzany jest wzór $2b_j+b_{j-1}=a_j$, czyli $b_{j-1}=a_j-2b_j$, gdzie przez a_j oznaczyliśmy współczynnik wielomianu f towarzyszący j–tej potędze zmiennej x.

Otrzymaliśmy oczywiście ten sam wynik, co poprzednio. Ta procedura zwana jest algorytmem Hornera. Z łatwością można napisać program komputerowy obliczający kolejne współczynniki ilorazu i w końcu resztę z dzielenia. W prostych sytuacjach (nieduże liczby całkowite) można obliczać kolejne współczynniki „w pamięci", choć autorzy podręczników polubili tabelki. Chodzi o to, że w istocie rzeczy nie ma powodu do wielokrotnego przepisywania x – wielomian jest określony, jeśli znamy jego współczynniki, więc to dzielenie można zapisać krócej.

Dzielimy wielomian $3x^4-8x^3+7x^2+2$ przez wielomian $x+2$. Wypisujemy współczynniki wielomianu, który dzielimy:

3	-8	7	0	2
3	$-8-2\cdot 3=-14$	$7-2\cdot(-14)=35$	$0-2\cdot 35=-70$	$2-2\cdot(-70)=142$

W drugim wierszu wypisaliśmy współczynniki ilorazu oraz resztę, pokazując działania prowadzące do ich obliczenia. W wyniku otrzymaliśmy równość: $3x^4-8x^3+7x^2+2=(x+2)(3x^3-14x^2+35x-70)+142$.

Przykład 12.
Przypomnijmy twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Jeśli $1\le n\in\mathbf{Z}$ oraz $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbf{Z}$ i liczba $x_0=\dfrac{p}{q}$, $p,q\in\mathbf{Z}$, $\mathrm{NWD}(p,q)=1$ jest pierwiastkiem równania $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n=0$, to $p\mid a_0$ (p jest dzielnikiem wyrazu wolnego) i $q\mid a_n$ (q jest dzielnikiem współczynnika kierującego).

Dowód jest banalny. Podstawiając $x=\dfrac{p}{q}$ w równaniu i mnożąc je przez q^n otrzymujemy

$$0=a_0q^n+a_1pq^{n-1}+\dots+a_{n-1}p^{n-1}q+a_np^n.$$

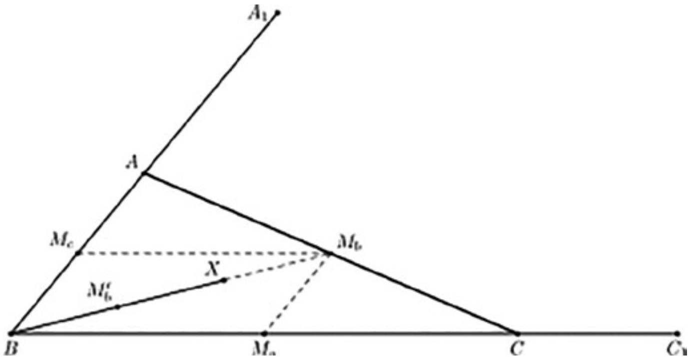
Z tego równania wynika, że $p\mid a_0q^n$ oraz $q\mid a_np^n$. Stąd i z tego, że $\mathrm{NWD}(p,q)=1$ wynika, że $p\mid a_0$ oraz $q\mid a_n$, co kończy dowód tego twierdzenia.

Geometria

Przykład 1.
Dany jest kąt wypukły $\sphericalangle A_1BC_1$ i punkt *X* leżący wewnątrz kąta $\sphericalangle A_1BC_1$. Skonstruować trójkąt *ABC*, którego wierzchołek *A* leży na półprostej BA_1, wierzchołek *C* – na półprostej BC_1 i którego środkiem ciężkości jest punkt *X*.

Dany jest kąt wypukły $\sphericalangle A_1BC_1$ i punkt *X* leżący wewnątrz kąta $\sphericalangle A_1BC_1$. Skonstruować trójkąt *ABC*, którego wierzchołek *A* leży na półprostej BA_1, wierzchołek *C* – na półprostej BC_1 i którego środkiem ciężkości jest punkt *X*.

Rozwiązanie.



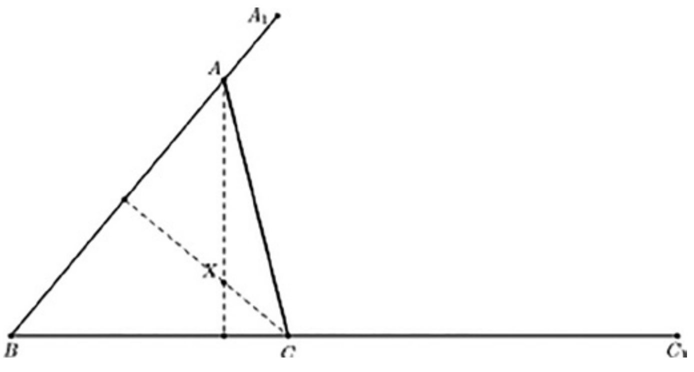
Znajdziemy najpierw środek odcinka M_b boku AC, korzystając z tego, że $\frac{XM_b}{BM_b} = \frac{1}{2}$,

więc znajdujemy środek M_b' odcinka BX i odkładamy odcinek $M_b' X$ na prostej BX tak, by punkt X stał się środkiem odcinka $M_b' M_b$. Przez punkt M_b prowadzimy równoległą do BA_1. Przecina ona prostą BC_1 w punkcie, który oznaczamy przez M_a. Na prostej BC_1 znajdujemy taki punkt C, że punkt M_a jest środkiem odcinka BC. Punkt wspólny prostej CM_b i prostej BA_1 oznaczamy literą A. Z twierdzenia Talesa wynika, że M_b jest środkiem odcinka AC, a to oznacza, że punkt X jest punktem wspólnym środkowych BM_b i AM_b trójkąta ABC, więc środkiem ciężkości trójkąta ABC.

Przykład 2.

Dany jest kąt wypukły $\sphericalangle A_1BC_1$ i punkt X leżący wewnątrz kąta $\sphericalangle A_1BC_1$. Skonstruować trójkąt ABC, którego wierzchołek A leży na prostej BA_1, wierzchołek C – na prostej BC_1, którego wysokości przecinają się w punkcie X.

Rozwiązanie.

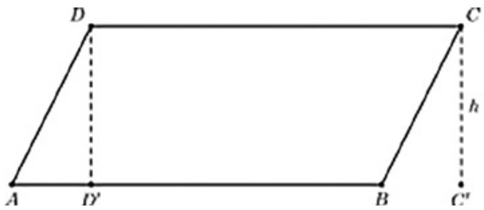


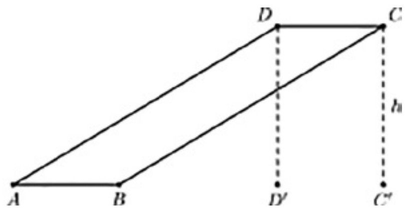
Przez punkt X prowadzimy proste ℓ_c - ℓ_a prostopadłe odpowiednio do prostych BA_1 i BC_1. Punkt wspólny ℓ_c i BC_1 oznaczamy przez C, a punkt wspólny ℓ_a i BA_1 oznaczamy przez A. Wysokości trójkąta ABC (według panującej obecnie mody: proste zawierające wysokości trójkąta) przecinają się w punkcie X.

Oczywiście jest możliwe, że ℓ_a lub ℓ_b przechodzi przez punkt B. Wtedy zadanie rozwiązania nie ma, bo trójkąt degeneruje się do odcinka lub punktu.

Przykład 3.
Udowodnić, że suma kwadratów wszystkich czterech boków równoległoboku jest równa sumie kwadratów obu przekątnych.

Rozwiązanie.

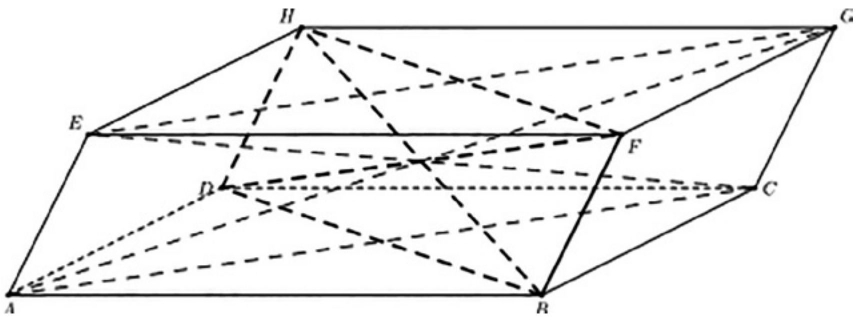




Niech A, B, C, D oznaczają kolejne wierzchołki równoległoboku, a D' i C' rzuty prostokątne punktów D i C na prostą AB i niech $h=|DD'|=|CC'|$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że kąt o wierzchołku A równoległoboku $ABCD$ nie jest rozwarty. Wtedy
$|BC|^2=|AD|^2=|AD'|^2+h^2$,
$|AC|^2=h^2+|AC'|^2=h^2+\left(|AB|+|BC'|\right)^2$, oraz
$|BD|^2=h^2+|BD'|^2=h^2+\left(|AB|-|AD'|\right)^2=h^2+\left(|AB|-|BC'|\right)^2$. Wynika stąd, że
$|AC|^2+|BD|^2=h^2+\left(|AB|+|BC'|\right)^2+h^2+\left(|AB|-|BC'|\right)^2=2h^2+2|AB|^2++2|BC'|^2=2|AB|^2+2|BC|^2$,
co kończy dowód.

Przykład 4.
Udowodnić, że suma kwadratów wszystkich dwunastu krawędzi równoległościanu jest równa sumie kwadratów jego czterech przestrzennych przekątnych (tzn. tych, które nie są zawarte w ścianach).

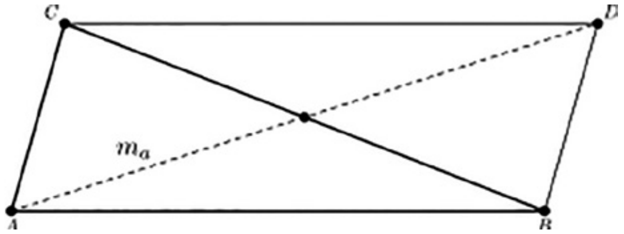
Rozwiązanie.



Niech równoległobok $ABCD$ będzie podstawą równoległościanu, a równoległobok $EFGH$ przeciwległą podstawą, przy czym odcinki AE, BF, CG i DH są krawędziami równoległościanu. Zastosujemy udowodnione w poprzednim przykładzie twierdzenie do równoległoboków $ACGE$, $BDHE$ i w końcu do $ABCD$. Zachodzą równości:
$|AG|^2+|CE|^2+|BH|^2+|DF|^2=2\left(|AE|^2+|AC|^2\right)+\left(|BF|^2+|BD|^2\right)=4|AE|^2+2\left(|AC|^2+|BD|^2\right)=4|AE|^2+4\left(|AB|^2+|AD|^2\right)$,
kończy dowód.

Przykład 5.
Dane są długości a, b, c boków trójkąta ABC, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Wyrazić za ich pomocą długości środkowych trójkąta ABC.

Rozwiązanie.

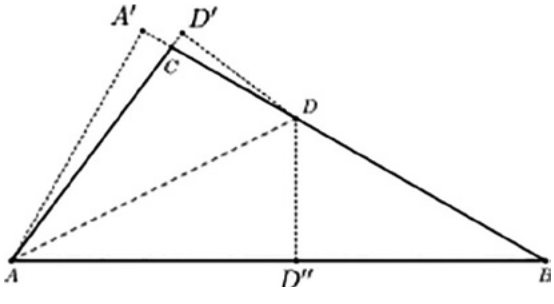


Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem o przekątnych AD i BC. Wtedy (zob. jeden z poprzednich przykładów) zachodzi równość $|AD|^2 + |BC|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2$, więc $|AD|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2 - |BC|^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$.

Przyjmując, że $m_a = \frac{1}{2}|BD|$ jest długością środkowej zaczynającej się w wierzchołku A otrzymujemy $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$. Analogicznie $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ i $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}$. Udało się.

Przykład 6.
Dane są długości a, b, c boków trójkąta ABC, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Wyrazić za ich pomocą długości odcinków, na które dzieli odcinek BC dwusieczna kąta BAC.

Rozwiązanie.



Niech D będzie takim punktem odcinka BC, że półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC. Wtedy stosunek pól trójkątów ABD i DCA jest z jednej strony równy $\frac{|BD|}{|DC|}$ – wysokość z wierzchołka A jest wspólna, a z drugiej $\frac{c}{b}$ – wysokości z wierzchołka D w trójkątach ABD i DCA są równe $|AD| sin\left(\frac{1}{2}|\angle BAC|\right)$. Mamy więc $|BD| + |DC| = a$

i $\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{c}{b}$. Stąd wynikają równości $a=|BD|+\dfrac{b}{c}\cdot|BD|=|BD|\left(1+\dfrac{b}{c}\right)$, a stąd $|BD|=\dfrac{ac}{b+c}$ oraz $|DC|=a-|BD|=a-\dfrac{ac}{b+c}=\dfrac{ab}{b+c}$. Żądany wzór został znaleziony.

Przykład 7.

Dane są długości a,b,c boków trójkąta ABC, $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$. Wyrazić za ich pomocą długości dwusiecznych trójkąta ABC.

Rozwiązanie. Niech D będzie takim punktem odcinka BC, że półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC. Niech β oznacza miarę kąta β. Skorzystamy z poprzedniego przykładu oraz z twierdzenia kosinusów. $|BD|=\dfrac{ac}{b+c}$, więc $|AD|^2=c^2+\left(\dfrac{ac}{b+c}\right)^2-2c\cdot\dfrac{ac}{b+c}\cos\beta$.

Wiemy też, że $b^2=c^2+a^2-2ab\cos\beta$, czyli $\cos\beta=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. Możemy więc napisać

$$|AD|^2=c^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2-2c\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{c}{(b+c)^2}\Big(c(b+c)^2+a^2c-(b+c)\left(a^2+c^2-b^2\right)\Big)=$$

$$\frac{c}{(b+c)^2}\Big(c(b+c)^2-b\left(a^2+c^2-b^2\right)-c\left(a^2+c^2-b^2\right)\Big)=\frac{c}{(b+c)^2}\Big(c(b+c)^2-b\left(c^2-b^2\right)-c\left(c^2-b^2\right)-a^2b\Big)=$$

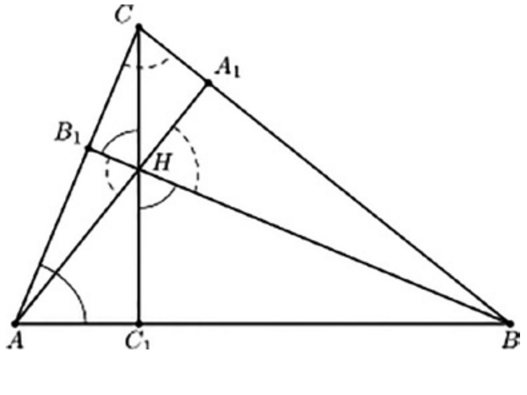
$$\frac{c}{(b+c)^2}\Big((b+c)^2(c-c+b)-a^2b\Big)=\frac{bc}{(b+c)^2}\Big((b+c)^2-a^2\Big),$$

zatem $|AD|=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$, gdzie $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ oznacza połowę obwodu trójkąta. Długości dwusiecznych z wierzchołków B i C to $\dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ i $\dfrac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$.

Przykład 8.

Niech H będzie punktem, w którym przecinają się proste zawierające wysokości trójkąta ABC. Udowodnić, że punkty symetryczne do H względem prostych AB, BC i CA leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Rozwiązanie.



Jeśli trójkąt ABC jest prostokątny, np. $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$, to jeden z boków jest średnicą okręgu opisanego na nim i stwierdzenie jest oczywiste. Niech A_1, B_1, C_1 będą spodkami (końcami) wysokości. Załóżmy, że trójkąt jest ostrokątny. Wtedy H leży wewnątrz okręgu i zachodzą równości

$|\sphericalangle AHB_1| = |\sphericalangle A_1HB| = |\sphericalangle CHB_1|$ i $|\sphericalangle AHB_1| = |\sphericalangle C_1HB| = |\sphericalangle BAC|$, zatem

$|\sphericalangle AHC| = |\sphericalangle AHB_1| + |\sphericalangle CHB_1| = |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CHB_1| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAC|$,

więc $|\sphericalangle AHC| + |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$, a stąd teza wynika od razu (na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów są równe 180°).

Jeśli np. kąt $\sphericalangle ACB$ jest rozwarty, to H leży na zewnątrz trójkąta i wtedy zachodzą równości $|\sphericalangle BHC| = |\sphericalangle BAH|$ i $|\sphericalangle AHC| = |\sphericalangle ABH|$ i wobec tego

$|\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle AHB| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle AHC| + |\sphericalangle BHC| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BAC| = 180^\circ$,

co dowodzi prawdziwości twierdzenia, jak w poprzednim przypadku.

Przykład 9.

Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości $2, 3, 4$? a $2, 3, 6$?

Rozwiązanie. Niech P oznacza pole trójkąta. Wtedy długości boków są równe $\frac{2P}{2}$, $\frac{2P}{3}$ *i* $\frac{2P}{4}$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia trójkąta z zadanymi długościami boków są nierówności trójkąta. Mamy $\frac{2P}{2} > \frac{2P}{3} > \frac{2P}{4}$, więc wystarczy sprawdzić, czy $\frac{2P}{3} + \frac{2P}{4} > \frac{2P}{2}$, co jest równoważne temu, że $\frac{7 \cdot 2P}{12} > \frac{2P}{2}$, a to jest prawda, bo $14 > 12$.

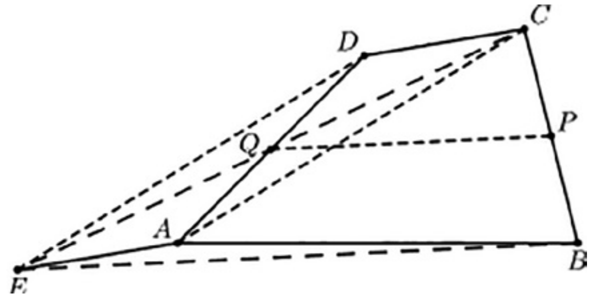
W pierwszym przypadku trójkąt istnieje. W drugim przypadku musiałoby być

$\frac{2P}{3} + \frac{2P}{6} > \frac{2P}{2}$, *ale* $\frac{2P}{3} + \frac{2P}{6} = \frac{2P}{2}$, więc trójkąta o takich wysokościach nie ma.

Przykład 10.

Dowieść, że jeśli w czworokącie wypukłym odcinek łączący środki przeciwległych boków jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych boków, to czworokąt jest trapezem.

Rozwiązanie.



Niech kolejnymi wierzchołkami czworokąta będą punkty A, B, C i D. Niech P oznacza środek boku BC, a Q – boku DA oraz niech $|PQ| = \frac{1}{2}\left(|AB| + |CD|\right)$. Niech E oznacza taki punkt płaszczyzny, że $EA \parallel DC$ i $|EA| = |DC|$, przy czym czworokąt $EADC$ jest równoległobokiem, a odcinek AD jego przekątną. Wtedy środkiem odcinka EC jest punkt Q, bo przekątne równoległoboku połowią jedna drugą. Wobec tego odcinek QP łączący środki boków CE i CB trójkąta EBC jest równoległy do podstawy EB i zachodzi wzór $|PQ| = \frac{1}{2}|EB|$ z drugiej strony $|EB| \le |EA| + |AB|$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy punkt A leży ma odcinku EB, ale wtedy $AB \parallel DC$.

Przykład 11.
Dowieść, że jeśli suma obu odcinków łączących środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego jest połową jego obwodu, to czworokąt jest równoległobokiem.

Rozwiązanie. W poprzednim przykładzie wykazaliśmy, że długość odcinka łączącego środki przeciwległych boków czworokąta nie może być większa od sumy długości pozostałych boków, a równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest trapezem. W sytuacji rozpatrywanej teraz długości obu odcinków łączących środki przeciwległych boków czworokąta są równe połowie obwodu, a to oznacza, że przeciwległe boki czworokąta są równoległe, więc jest on równoległobokiem.

Dowody w matematyce

Zadanie 1.
Wykaż, że wśród czterech dowolnych liczb naturalnych istnieją co najmniej dwie takie, których różnica jest liczbą podzielną przez 3.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń: 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia.

Komentarz. Uczniowie powinni przyzwyczaić się do tego, że rozwiązanie zadania może przyjąć formę opisową i składać się – głównie – z komentarzy, w tym podawania argumentów i uzasadnień. Taka umiejętność jest niezbędna do tworzenia poprawnych komunikatów w języku matematycznym.

Przykładowe rozwiązanie

Reszta z dzielenia dowolnej liczby naturalnej przez 3 może być jedynie liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2\}$.

Zatem wybierając cztery dowolne liczby naturalne – i dzieląc je przez 3 – otrzymamy w każdym przypadku co najmniej dwie takie, których reszty będą równe.

Oznacza to, że te dwie liczby możemy zapisać w postaci: $k \quad r$ i $3l + r$, gdzie k i l są dowolnymi liczbami naturalnymi, a r jest liczbą należącą do zbioru $\{0, 1, 2\}$.

Różnica tych dwóch liczb jest równa: $(3k + r) - (3l + r) = 3k + r - 3l - r = 3 \cdot (k - l)$, a zatem jest podzielna przez 3.

To kończy dowód.

Zadanie 2.

Wykaż, że jeżeli liczba całkowita a przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to sześcian tej liczby przy dzieleniu przez 3 również daje resztę 2.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń: 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia.

Komentarz. Przy dowodzeniu własności liczb całkowitych, wynikających z podzielności liczb lub dzielenia z resztą, ważne jest operowanie uogólnionym zapisem liczb mających taką samą własność. Na przykład liczba całkowita a, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, może być zapisana w następujący sposób: $a = 3k + 2$. Uczniowie z łatwością opanują powyższą umiejętność, jeśli wykorzystamy konkretny przypadek dzielenia z resztą, np. $20:3 = 6$ r 2, co można opisać równością $20 = 3 \cdot 6 + 2$. Ważne, aby w konkretnym przykładzie każda z czterech liczb była inna niż pozostałe.

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ liczba całkowita a przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to można zapisać ją w postaci: $a = 3k + 2$, gdzie k – dowolna liczba należąca do zbioru **Z** liczb całkowitych.

Zatem

$$a^3 = (3k + 2)^3 = (3k)^3 + 3 \cdot (3k)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (3k) \cdot 2^2 + 2^3,$$

czyli

$$a^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8.$$

Stąd wynika, że
$a^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 6 + 2 = 3 \cdot \left(9k^3 + 16k^2 + 12k + 2\right) + 2$.

Liczba $9k^3 + 16k^2 + 12k + 2$ jest liczbą całkowitą, bo k jest liczbą całkowitą.

Oznacza to, że sześcian liczby całkowitej a przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

To kończy dowód.

Zadanie 3.
Wykaż, że równanie $\left(x^3 - x\right)^4 - 5\left(x^3 - x\right)^2 + 6 = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnienie ich poprawności.	III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy. Uczeń: 5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe.

Komentarz. W analizowanym przykładzie najważniejszą kwestią jest uzasadnienie, że równanie nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych. Umiejętność rozwiązywania równania kwadratowego jest w tym przypadku jedynie algorytmicznym narzędziem, które doprowadza rozumowanie do takiego etapu, kiedy do rozwiązania zadania wystarczy proste, ale logiczne uzasadnienie tezy.

Przykładowe rozwiązanie
Równanie $\left(x^3 - x\right)^4 - 5\left(x^3 - x\right)^2 + 6 = 0$ jest przykładem równania wielomianowego, które można doprowadzić do równania kwadratowego/dwukwadratowego.

Podstawiając $t = \left(x^3 - x\right)^2$, $\quad t \geq 0$, otrzymujemy równanie kwadratowe zmiennej t następującej postaci: $t^2 - 5t + 6 = 0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $t_1 = 2, \quad t_2 = 3$.

Stąd po podstawieniu otrzymujemy: $\left(x^3 - x\right)^2 = 2 \quad \text{lub} \quad \left(x^3 - x\right)^2 = 3$.

Oznacza to, że
(I) $x^3 - x = \sqrt{2}$ (II) $x^3 - x = -\sqrt{2}$ lub (III) $x^3 - x = \sqrt{3}$ (IV) $x^3 - x = -\sqrt{3}$

Lewa strona równań (I)-(IV) jest liczbą całkowitą dla każdego x należącego do zbioru liczb całkowitych, a prawa strona równań (I)-(IV) – liczbą niewymierną. Oznacza to, że w żadnym przypadku (I)-(IV) lewa strona równości nie może być równa prawej.

Zatem równanie $\left(x^3-x\right)^4-5\left(x^3-x\right)^2+6=0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

To kończy dowód.

Zadanie 4.
Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej *n* liczba $5n^2+10n+8$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń: 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia.

Komentarz. Zadanie to jest przykładem prostego dowodu, który jednak nie będzie prawidłowo przeprowadzony bez odkrycia konkretnej możliwości innego zapisu danej liczby. Ważne jest zatem ukierunkowanie myślenia uczniów w taki sposób, aby konieczność zastosowania innego zapisu liczby nie kojarzyła się z czynnością sztuczną i nieosiągalną.

Przykładowe rozwiązanie
Liczbę $5n^2+10n+8$ możemy zapisać w postaci: $5n^2+10n+5+3=5\cdot\left(n^2+2n+1\right)+3.$

Liczba n^2+2n+1 jest liczbą całkowitą, bo n jest liczbą całkowitą.

Oznacza to, że dla dowolnej liczby naturalnej *n* liczba $5n^2+10n+8$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

To kończy dowód.

Zadanie 5.
Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $4n^3+20n-12$ jest podzielna przez 12.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń: 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia.

Komentarz. W procesie dydaktycznym istotne jest stopniowanie trudności. Analizowane zadanie wpisuje się w realizację tego postulatu.

Przykładowe rozwiązanie

Wyrażenie $4n^3 + 20n - 12$ możemy zapisać w postaci: $4n^3 - 4n + 4n + 20n - 12$.

Po wykonaniu działań i wyłączeniu wspólnego czynnika poza nawias otrzymujemy:
$4n^3 - 4n + 4n + 20n - 12 = 4n^3 - 4n + 24n - 12 = 4n \cdot \left(n^2 - 1\right) + 12\left(2n - 1\right)$.

Wyrażenie to jest sumą dwóch składników: (I) $4n \cdot \left(n^2 - 1\right)$ i (II) $12\left(2n - 1\right)$.

(I): $4n \cdot \left(n^2 - 1\right) = 4n \cdot \left(n - 1\right) \cdot \left(n + 1\right)$. Składnik (I) zawiera iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych: $n-1$, n, $n+1$, gdzie n oznacza dowolną liczbę ze zbioru **Z**. Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 3, ponieważ co trzecia liczba całkowita jest podzielna przez 3. Z kolei, w rozważaniach podzielności przez 2 możemy uwzględnić dwa przypadki: (a) pierwsza i trzecia z trzech kolejnych liczb całkowitych są parzyste lub (b) tylko środkowa z trzech kolejnych liczb całkowitych jest parzysta. Oznacza to, że zawsze iloczyn $n \cdot \left(n - 1\right) \cdot \left(n + 1\right)$ jest podzielny przez 2 dla dowolnego n należącego do zbioru **Z**. Zatem składnik (I) jest podzielny przez 3 i przez 2, czyli jest podzielny przez 6. Więc może zostać zapisany w postaci $6k$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Zatem: $4n \cdot \left(n^2 - 1\right) = 4n \cdot \left(n - 1\right) \cdot \left(n + 1\right) = 4 \cdot 6k = 24k = 12 \cdot 2k$. Stąd wynika, że wyrażenie (I) jest podzielne przez 12, dla dowolnego n należącego do zbioru liczb całkowitych.

(II): $12\left(2n - 1\right)$. Składnik (II) jest podzielny przez 12 dla każdego n należącego do zbioru **Z**.

Suma liczb (I) i (II), podzielnych przez 12, jest także liczbą podzielną przez 12, czyli $4n^3 + 20n - 12$ jest podzielne przez 12 dla każdego n należącego do zbioru liczb całkowitych.

To kończy dowód.

Zadanie 6.

Wykaż, że liczba $17^{16} - 15^{16}$ jest podzielna przez 32.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń: 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia.

Komentarz. Zadanie jest przykładem sytuacji wymagającej naturalnego zastosowania umiejętności zapisanych w różnych miejscach podstawy programowej. W tym konkretnym przypadku uczeń powinien zastosować właściwy wzór skróconego mnożenia, a także prawa działań na potęgach. Uczeń powinien mieć świadomość, że matematyczne problemy często można rozwiązywać różnymi sposobami z wykorzystaniem odmiennych narzędzi matematycznych.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób
W pierwszym kroku – wykorzystując prawa działań na potęgach – możemy wykonać przekształcenie: $17^{16}-15^{16}=\left(17^2\right)^8-\left(15^2\right)^8$.

W drugim kroku – korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na a^n-b^n – otrzymamy iloczyn dwóch wyrażeń, w którym pierwsze z nich ma postać:
$\left(17^2-15^2\right)=289-225=64=2\cdot 32$.

Iloczyn liczb, z których jedna jest liczbą podzielną przez 32, jest podzielny przez 32.

To kończy dowód.

II sposób
W pierwszym kroku – wykorzystując prawa działań na potęgach – możemy wykonać przekształcenie: $17^{16}-15^{16}=\left(17^8\right)^2-\left(15^8\right)^2$.

W drugim kroku – korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na a^2-b^2 – otrzymujemy:
$\left(17^8\right)^2-\left(15^8\right)^2=\left(17^8-15^8\right)\left(17^8+15^8\right)$.

W trzecim kroku – wykorzystując ponownie prawa działań na potęgach – mamy:

$$\left(17^8-15^8\right)\left(17^8+15^8\right)=\left[\left(17^4\right)^2-\left(15^4\right)^2\right]\left(17^8+15^8\right).$$

W czwartym kroku ponownie wykorzystamy wzór skróconego mnożenia:

$$\left[\left(17^4\right)^2-\left(15^4\right)^2\right]\left(17^8+15^8\right)=\left(17^4-15^4\right)\left(17^4+15^4\right)\left(17^8+15^8\right).$$

Kolejny – piąty – krok może być powtórzeniem rozumowania z poprzednich etapów rozwiązania:
$$\left(17^4-15^4\right)\left(17^4+15^4\right)\left(17^8+15^8\right)=\left(17^2-15^2\right)\left(17^2+15^2\right)\left(17^4+15^4\right)\left(17^8+15^8\right).$$

Zauważmy, że $17^2-15^2=289-225=64$. Stąd wynika, że
$$64\cdot\left(17^2+15^2\right)\left(17^4+15^4\right)\left(17^8+15^8\right)=32\cdot 2\cdot\left(17^2+15^2\right)\left(17^4+15^4\right)\left(17^8+15^8\right).$$

Liczba ta jest podzielna przez 32.

To kończy dowód.

Zadanie 7.

Wykaż, że liczba $8^{14} - 10^{7}$ jest podzielna przez 27.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń: 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia.

Komentarz. Zadanie to jest podobne, w sformułowanej treści, do zadania poprzedniego, ale w rozwiązaniu trudno uniknąć zastosowania wzoru na różnicę *n*-tych potęg.

Przykładowe rozwiązanie

W pierwszym kroku – wykorzystując prawa działań na potęgach – otrzymujemy: $8^{14} - 10^{7} = \left(8^{2}\right)^{7} - 10^{7} = 64^{7} - 10^{7}$.

W drugim kroku – korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na $a^{n} - b^{n}$ – otrzymujemy:

$$64^{7} - 10^{7} = (64-10)\left(64^{6} + 64^{5}\cdot 10 + 64^{4}\cdot 10^{2} + 64^{3}\cdot 10^{3} + 64^{2}\cdot 10^{4} + 64^{1}\cdot 10^{5} + 10^{6}\right),$$

$$64^{7} - 10^{7} = 54\left(64^{6} + 64^{5}\cdot 10 + 64^{4}\cdot 10^{2} + 64^{3}\cdot 10^{3} + 64^{2}\cdot 10^{4} + 64^{1}\cdot 10^{5} + 10^{6}\right),$$

$$64^{7} - 10^{7} = 27\cdot 2\cdot\left(64^{6} + 64^{5}\cdot 10 + 64^{4}\cdot 10^{2} + 64^{3}\cdot 10^{3} + 64^{2}\cdot 10^{4} + 64^{1}\cdot 10^{5} + 10^{6}\right).$$

Liczba ta jest podzielna przez 27.

To kończy dowód.

Zadanie 8.

Wykaż, że suma sześcianów dwóch kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 9.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń: 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia.

Komentarz. Zadanie jest przykładem realizacji treści nauczania, które wprowadza na poziomie podstawowym podstawa programowa.

Przykładowe rozwiązanie

Dwie kolejne liczby naturalne a i b niepodzielne przez 3 możemy opisać następująco: $a = 3k+1$ i $b = 3k+2$, gdzie k – dowolna liczba należąca do zbioru $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Zatem: $a^3 + b^3 = (3k+1)^3 + (3k+2)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8.$

Czyli: $a^3 + b^3 = 54k^3 + 81k^2 + 45k + 9 = 9 \cdot (6k^3 + 9k^2 + 5k + 1).$

Oznacza to, że suma sześcianów dwóch kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, jest podzielna przez 9.

To kończy dowód.

Zadanie 9.
Wykaż, że suma *n* początkowych nieparzystych dodatnich liczb jest kwadratem liczby naturalnej.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.	VI. Ciągi. Zakres podstawowy. Uczeń: 4) stosuje wzór na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Komentarz. Zadanie wskazuje, że warto sięgać do klasyki treści matematycznych, z którymi należy zapoznać uczniów w szkole ponadpodstawowej. Sprzyja to realizacji nowej podstawy programowej – z jednej strony, a z drugiej – utrwala dobre i sprawdzone wzorce w zakresie nauczania matematyki.

Przykładowe rozwiązanie
Liczby nieparzyste dodatnie to: $1, 3, 5, \ldots$

Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 1$ i $r = 2$.

Stosując wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego, otrzymujemy:
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = 1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$

Stosując wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2.$$

Oznacza to, że suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

To kończy dowód.

Zadanie 10.

Wykaż, że ciąg (a_n) określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = 7n - 5$, jest ciągiem arytmetycznym.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	VI. Ciągi. Zakres podstawowy. Uczeń: 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Komentarz. Jest to typowe zadanie, wymagające uzasadnienia arytmetyczności ciągu o nieskończonej liczbie wyrazów. Warto pamiętać, aby uświadomić uczniom, że dla ciągu o skończonej, niewielkiej liczbie wyrazów można przeprowadzić rozumowanie uzasadniające arytmetyczność ciągu oparte na wyznaczaniu różnic każdych dwóch sąsiednich wyrazów. Istotne jest także, aby uczniowie rozumieli, że wskazanie dwóch różnic sąsiednich wyrazów, które nie są sobie równe, wystarczy do uzasadnienia, że dany ciąg nie jest arytmetyczny.

Przykładowe rozwiązanie

Pokażemy, że różnica dowolnych dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) – np. a_{n+1} i a_n – jest wielkością stałą dla każdego $n \geq 1$.

Zatem

$$a_{n+1} - a_n = 7(n+1) - 5 - (7n-5) = 7n + 7 - 5 - 7n + 5 = 7.$$

Oznacza to, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 7$.

To kończy dowód.

Zadanie 11.

Udowodnij, że kwadraty liczb całkowitych niepodzielnych przez 5 przy dzieleniu przez 5 dają resztę 1 lub 4.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń: 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia.

Komentarz. Uczeń powinien opanować umiejętności systematyzowania działań w realizacji zagadnień wieloetapowych. Ważne jest zatem, aby rozpatrywać wszystkie przypadki i w każdym z nich precyzyjnie opisać prowadzone rozumowanie.

Przykładowe rozwiązanie

Liczby podzielne przez 5 opisuje wyrażenie: $5k$, gdzie k jest dowolną liczbą należącą do zbioru **Z**.

Liczby niepodzielne przez 5 opisują wyrażenia: $5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$, gdzie k jest dowolną liczbą należącą do zbioru **Z**.

Rozważmy kwadraty liczb niepodzielnych przez 5, w każdym z czterech przypadków:

a) $(5k+1)^2 = 25k^2+10k+1 = 5\cdot\left(5k^2+2k\right)+1$, reszta z dzielenia przez 5 jest równa 1;

b) $(5k+2)^2 = 25k^2+20k+4 = 5\cdot\left(5k^2+4k\right)+4$, reszta z dzielenia przez 5 jest równa 4;

c) $(5k+3)^2 = 25k^2+30k+9 = 25k^2+30k+5+4 = 5\cdot\left(5k^2+6k+1\right)+4$, reszta z dzielenia przez 5 jest równa 4;

d) $(5k+4)^2 = 25k^2+40k+16 = 25k^2+40k+15+1 = 5\cdot\left(5k^2+8k+3\right)+1$, reszta z dzielenia przez 5 jest równa 1.

Oznacza to, że kwadrat liczby niepodzielnej przez 5 przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1 lub 4.

To kończy dowód.

Zadanie 12.

Uzasadnij, że funkcja *f* określona wzorem $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-2$ nie przyjmuje wartości ujemnych dla $x>0$.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnienie ich poprawności.	II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń: 1) stosuje wzory skróconego mnożenia.

Komentarz. Zadanie jest przykładem zagadnienia, które można skutecznie rozwiązać, wykorzystując narzędzia matematyczne z różnych obszarów nauczania matematyki. Poprawne rozwiązania nie muszą mieć żadnej części wspólnej. Ważne jest, żeby dobierać takie metody, które pozwolą skutecznie i sprawnie zrealizować strategię rozwiązania problemu.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Funkcja *f* zawiera wyrażenie, które jest sumą danej liczby dodatniej i jej odwrotności:

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}.$$

Uzasadnienie wymaga powołania się na następujące twierdzenie (bez przeprowadzania dowodu):

suma dowolnej liczby dodatniej i jej odwrotności jest nie mniejsza niż 2.

Zatem $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geq 2$ dla $x>0$. Czyli $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-2\geq 0$ dla $x>0$.

Oznacza to, że funkcja f nie przyjmuje wartości ujemnych dla dowolnego $x>0$.

To kończy dowód.

II sposób

Należy wykazać, że $f(x)\geq 0$ dla dowolnego $x>0$.

Zatem: $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-2\geq 0 \quad / \cdot 2x \qquad (x>0),$

$$x^2+4-4x\geq 0, \qquad x^2-4x+4\geq 0,$$

$$(x-2)^2\geq 0.$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

Oznacza to, że funkcja f nie przyjmuje wartości ujemnych dla dowolnego $x>0$.

To kończy dowód.

Zadanie 13.

Udowodnij, że funkcja *f* określona wzorem $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty,-3)$.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnienie ich poprawności.	V. Funkcje. Zakres rozszerzony. Uczeń: 3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem. ALBO XII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Uczeń: 5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji.

Komentarz. Zadanie – podobnie jak poprzednie – pokazuje różne metody realizacji strategii rozwiązania.

I sposób (z wykorzystaniem definicji)
Należy uzasadnić, iż wraz ze wzrostem argumentów funkcji *f* rosną także odpowiadające im wartości, tzn. dla dowolnego *x* należącego do przedziału $(-\infty, -3)$ jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Niech x_1 i x_2 będą dowolnymi liczbami, które należą do przedziału $(-\infty, -3)$. Ponadto zakładamy, że $x_1 < x_2$ (czyli $x_1 - x_2 < 0$).

Wyznaczmy teraz wartość funkcji *f* dla argumentów – odpowiednio – x_1 i x_2:

$f_1(x) = \dfrac{x_1 - 1}{x_1 + 3}$ oraz $f_2(x) = \dfrac{x_2 - 1}{x_2 + 3}$.

Należy zbadać jaki znak – dodatni czy ujemny – ma wartość wyrażenia: $f(x_1) - f(x_2)$.

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 3} - \frac{x_2 - 1}{x_2 + 3} = \frac{(x_1 - 1)(x_2 + 3) - (x_2 - 1)(x_1 + 3)}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)}.$$

Stąd po wykonaniu w liczniku działań i wyłączeniu wspólnego czynnika poza nawias mamy:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4(x_1 - x_2)}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)}$$

- $x_1 + 3 > 0$ i $x_2 + 3 > 0$; z założenia x_1 i x_2 jest liczbą z przedziału $(-\infty, -3)$;
- $x_1 - x_2 < 0$; z założenia.

Oznacza to, że dla dowolnego x należącego do przedziału $(-\infty, -3)$ różnica $f(x_1) - f(x_2) < 0$ (czyli $f(x_1) < f(x_2)$).

Funkcja *f* jest zatem rosnąca w przedziale $(-\infty, -3)$.

To kończy dowód.

II sposób (z wykorzystaniem rachunku różniczkowego)

Należy pokazać, iż pochodna funkcji *f* w przedziale $(-\infty, -3)$ przyjmuje wartości dodatnie.

Zatem $f'(x) = \dfrac{(x-1)'(x+3) - (x-1)(x+3)'}{(x+3)^2}$,

czyli $f'(x) = \dfrac{(x+3) - (x-1)}{(x+3)^2} = \dfrac{x + 3 - x + 1}{(x+3)^2} = \dfrac{4}{(x+3)^2}$.

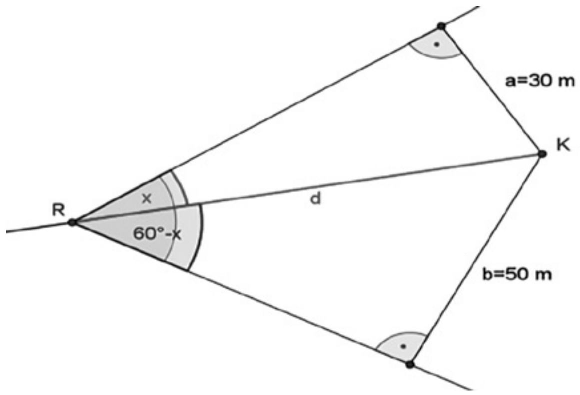
Stąd wynika, że $f'(x) > 0$ dla każdego *x* należącego do przedziału $(-\infty, -3)$.

Funkcja f jest określona i różniczkowalna w przedziale $(-\infty, -3)$ oraz jej pochodna jest w każdym punkcie przedziału $(-\infty, -3)$ dodatnia, więc funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

To kończy dowód.

Zadanie 14.

Droga rozwidla się na dwie drogi tworzące ze sobą kąt 60^o. Między tymi dwoma drogami stoi kapliczka (K) w odległości $a = 30\ m$ od jednej i $b = 50\ m$ od drugiej drogi (zobacz rysunek).



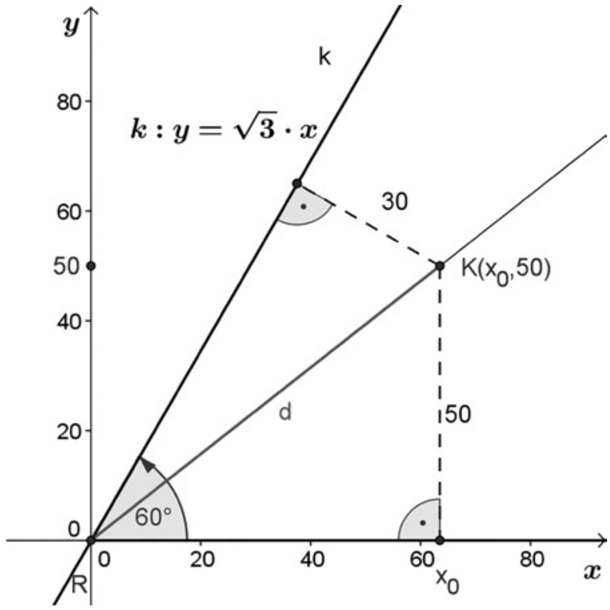
Wykaż, że odległość d tej kapliczki od rozwidlenia dróg jest równa $\frac{140}{\sqrt{3}}$ metrów.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.	VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń: 12) przeprowadza dowody geometryczne. Zakres rozszerzony. Uczeń stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Komentarz. Jest to przykład dowodu geometrycznego w zadaniu z kontekstem realistycznym.

Źródło: Finał konkursu *Matematyka w zastosowaniach 2015.*

Przykładowe rozwiązania
I sposób (z wykorzystaniem układu współrzędnych)
– poziom podstawowy (odległość punktu od prostej)



Droga rozwidla się w początku układu współrzędnych, tworząc dwie drogi: pierwsza pokrywa się z dodatnią półosią osi OX, druga zaś zawarta jest w prostej k, która tworzy z osią OX kąt o mierze 60^o. Równanie prostej k ma więc postać: $y = \sqrt{3}x$.

Odległość punktu K od osi OX wynosi 50, zatem K ma współrzędne $K = (x_0, 50)$, gdzie $x_0 > 0$.

Po przekształceniu równania prostej k do postaci ogólnej korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej i otrzymujemy:

$$30 = \frac{\left|\sqrt{3} \cdot x_0 - 50\right|}{\sqrt{3+1}} = \frac{\left|\sqrt{3} \cdot x_0 - 50\right|}{2}.$$

Zatem $\left|\sqrt{3} \cdot x_0 - 50\right| = 60.$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy rozwiązania: $x_0 = \frac{110}{\sqrt{3}}$ oraz $x_0 = -\frac{10}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie $x_0 = -\frac{10}{\sqrt{3}}$ nie spełnia założenia $x_0 > 0.$

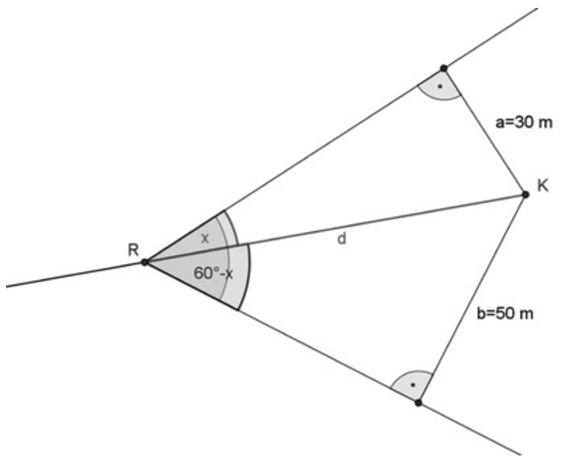
Oznacza to, że kapliczka znajduje się w punkcie $K = \left(\frac{110}{\sqrt{3}}, 50\right)$. Odległość tego punktu

od początku układu współrzędnych wynosi: $d = \sqrt{\frac{12100}{3} + 2500} = \sqrt{\frac{19600}{3}} = \frac{140}{\sqrt{3}} \approx 81$

Odległość kapliczki od rozwidlenia dróg jest równa $d = \frac{140}{\sqrt{3}}$ metrów.

To kończy dowód.

II sposób (funkcje trygonometryczne)
– poziom rozszerzony (wzór na sinus różnicy dwóch kątów)



Z zależności trygonometrycznych w trójkątach prostokątnych otrzymujemy:

$$\sin x = \frac{30}{d} \quad \text{oraz} \quad \sin(60^\circ - x) = \frac{50}{d}$$

Stąd, ponieważ $0 < x < 60^\circ$, więc $\cos x = \sqrt{1 - \frac{900}{d^2}} = \frac{\sqrt{d^2 - 900}}{d}$

Wykorzystując wzór na sinus różnicy kątów mamy:
$\sin(60^\circ - x) = [\sin 60^\circ \cos x - \cos 60^\circ \sin x]$.

Zatem: $\sin(60^\circ - x) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right]$, czyli $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right] = \frac{50}{d}$. Stąd wynika, że

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{d^2 - 900}}{d} - \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{d} = \frac{50}{d}$$

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymujemy:

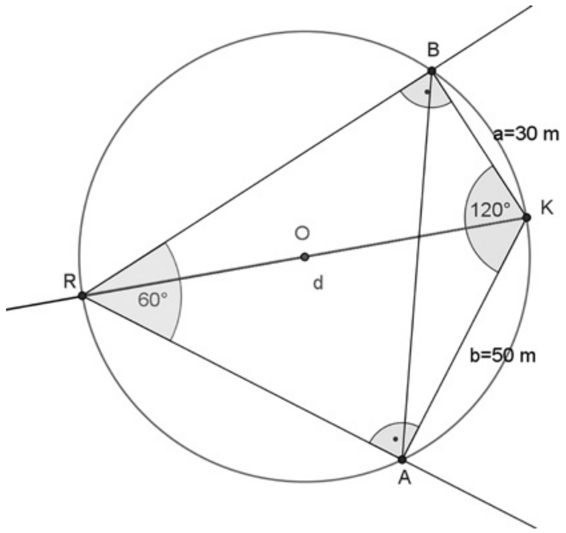
$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{d^2 - 900} - 30 = 100, \quad \sqrt{d^2 - 900} = \frac{130}{\sqrt{3}}$$

$d^2 - 900 = \frac{16900}{3}$, więc $d^2 = \frac{19600}{3}$, czyli $d = \frac{140}{\sqrt{3}} \approx 81\, m$

Odległość kapliczki od rozwidlenia dróg jest równa $d = \frac{140}{\sqrt{3}}$ metrów.

To kończy dowód.

III sposób (twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów)
– poziom rozszerzony (własności czworokątów wpisanych w okrąg)



Zauważmy, że czworokąt $AKBR$ spełnia warunek równości sumy przeciwległych kątów. Oznacza to, że na tym czworokącie można opisać okrąg. Wtedy szukana odległość d jest równa średnicy tego okręgu.

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie AKB obliczamy długość $x = |AB|$:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° = 900 + 2500 + 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} = 4900.$$

Zatem $x = 70$.

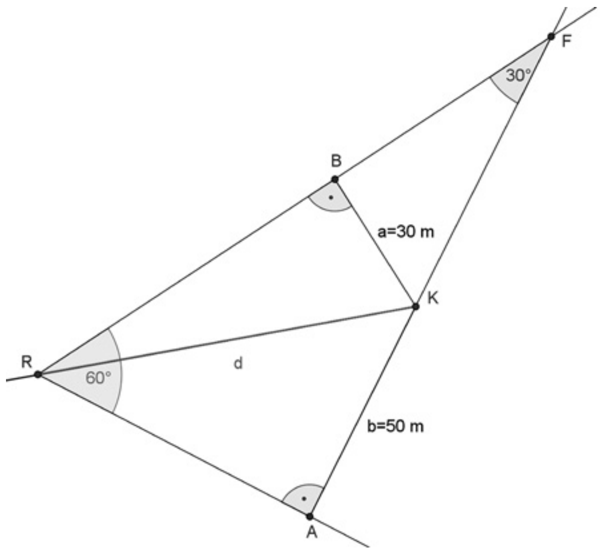
Z twierdzenia sinusów w trójkącie ABR otrzymujemy:

$\frac{x}{\sin 60°} = 2R$. Stąd $R = \frac{70}{\sqrt{3}}$. Długość d jest średnicą okręgu, więc $d = 2R = \frac{140}{\sqrt{3}}$.

Odległość kapliczki od rozwidlenia dróg jest równa $d = \frac{140}{\sqrt{3}}$ metrów.

To kończy dowód.

IV sposób (oryginalne rozwiązanie uczniowskie)
– poziom podstawowy (twierdzenie Pitagorasa i trójkąt o kątach wewnętrznych: $30°, 45°, 60°$)



Zauważmy, że prowadząc półproste AK oraz RB do ich przecięcia w punkcie F, otrzymamy trójkąt, którego kąty wewnętrzne mają miary: $30°, 45°, 60°$.

Stąd można obliczyć $|KF| = 60$.

Zatem $|AF| = 110$.

Jednocześnie $110 = |RA|\sqrt{3}$, więc $|RA| = \frac{110\sqrt{3}}{3}$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ARK otrzymujemy:

$$d^2 = 50^2 + \left(\frac{110}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$d^2 = 2500 + \frac{12100}{3} = \frac{7500 + 12100}{3} = \frac{19600}{3}.$$

Stąd $d = \sqrt{\frac{19600}{3}} = \frac{140}{\sqrt{3}} \approx 81.$

Odległość kapliczki od rozwidlenia dróg jest równa $d = \frac{140}{\sqrt{3}}$ metrów.

To kończy dowód.

Zadanie 15.

Dane są dwa ustalone punkty A i B na płaszczyźnie. Wykaż, że zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu B jest dwa razy większa od odległości od puntu A, tworzy okrąg.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.	IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres rozszerzony. Uczeń: 1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

Komentarz. Zadanie jest przykładem problemu, w rozwiązaniu którego można wykorzystać dość specyficzne umiejętności matematyczne. Problem w treści zadania, który został opisany w języku planimetrii, najłatwiej rozwiązuje się po przetransponowaniu go do obszaru geometrii analitycznej na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Przykładowe rozwiązanie

Wybierzmy dwa dowolne punkty A oraz B i umieśćmy te punkty w układzie współrzędnych na płaszczyźnie kartezjańskiej, w taki sposób, że $A=(0,0)$ i $B=(a,0)$, gdzie $a>0$.

Niech punkt $P=(x,y)$ będzie takim punktem płaszczyzny, który spełnia warunek: odległość punktu P od punktu B jest dwa razy większa niż odległość punktu P od punktu A.

Zatem $2|AP|=|BP|$ oraz $|AP|=\sqrt{x^2+y^2}$ i $|BP|=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

Stąd po podstawieniu otrzymujemy zależność: $2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

Po kolejnych równoważnych przekształceniach otrzymujemy:
$4\left(x^2+y^2\right)=(x-a)^2+y^2,\ 4x^2+4y^2=x^2-2xa+a^2+y^2,\ 3x^2+3y^2+2xa-a^2=0.$

Z tego wynika, że współrzędne punktu P spełniają warunek: $x^2+y^2+\frac{2}{3}xa-\frac{1}{3}a^2=0.$

Zbiór wszystkich punktów P, których współrzędne spełniają powyższy warunek, tworzy na płaszczyźnie kartezjańskiej okrąg o środku w punkcie $S=\left(-\frac{1}{3}a,0\right)$ i promieniu $r=\frac{2}{3}a.$

To kończy dowód.

Zadanie 16.

W arkuszu maturalnym z matematyki na poziomie podstawowym jest 25 zadań zamkniętych. W każdym z nich zaproponowane są cztery odpowiedzi – tylko jedna jest poprawna; za każdą poprawnie zaznaczoną odpowiedź uzyskuje się 1 punkt. Wykaż, że prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie 15 punktów, przy losowym wyborze wszystkich odpowiedzi przy każdym zadaniu zamkniętym, jest liczbą mniejszą od $0{,}0001$.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnienie ich poprawności.	XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Poziom rozszerzony. Uczeń: 2) stosuje schemat Bernoulliego.

Komentarz. Do rozwiązania tego zadania, w którym można wykorzystać np. schemat Bernoulliego, konieczne jest opracowanie strategii prowadzenia obliczeń, zwłaszcza na kalkulatorze.

Zadanie 17.

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b wpisano kwadrat w taki sposób, że dwa jego boki zawierają się w przyprostokątnych.

Wykaż, że pole tego kwadratu jest równe $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$.

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Treści nauczania – wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.	VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń: 8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Komentarz. Zadanie można rozwiązać – np. odwołując się do cechy podobieństwa odpowiednich trójkątów – także ze sformułowaniem „oblicz pole kwadratu" zamiast „wykaż, że pole kwadratu jest równe" i może być wykorzystane jako element pokonywania uczniowskich obaw przed zadaniami na dowodzenie.

vademecum.ore.edu.pl