

# Podstawa programowa kształcenia ogólnego

z komentarzem



**Dobra  
Szkoła**

Szkoła podstawowa  
**Matematyka**



MINISTERSTWO  
EDUKACJI  
NARODOWEJ



OŚRODEK  
ROZWOJU  
EDUKACJI





# Podstawa programowa kształcenia ogólnego

z komentarzem

Szkoła podstawowa  
**Matematyka**



## Spis treści

Preambuła podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej .....	5
Podstawa programowa przedmiotu <i>matematyka</i> .....	10
Cele kształcenia – wymagania ogólne .....	10
Treści nauczania – wymagania szczegółowe .....	11
Warunki i sposób realizacji .....	20
Komentarz do podstawy programowej przedmiotu <i>matematyka</i> – <i>Maciej Borodzik, Regina Pruszyńska</i> .....	25
Ogólne założenia zmian .....	25



## Preambuła podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej

Kształcenie w szkole podstawowej stanowi fundament wykształcenia. Zadaniem szkoły jest łagodne wprowadzenie dziecka w świat wiedzy, przygotowanie do wykonywania obowiązków ucznia oraz wdrażanie do samorozwoju. Szkoła zapewnia bezpieczne warunki oraz przyjazną atmosferę do nauki, uwzględniając indywidualne możliwości i potrzeby edukacyjne ucznia. Najważniejszym celem kształcenia w szkole podstawowej jest dbałość o integralny rozwój biologiczny, poznawczy, emocjonalny, społeczny i moralny ucznia.

Kształcenie w szkole podstawowej trwa osiem lat i jest podzielone na dwa etapy edukacyjne:

- 1) I etap edukacyjny obejmujący klasy I–III szkoły podstawowej – edukacja wczesnoszkolna;
- 2) II etap edukacyjny obejmujący klasy IV–VIII szkoły podstawowej.

Kształcenie ogólne w szkole podstawowej ma na celu:

- 1) wprowadzanie uczniów w świat wartości, w tym ofiarności, współpracy, solidarności, altruizmu, patriotyzmu i szacunku dla tradycji, wskazywanie wzorców postępowania i budowanie relacji społecznych, sprzyjających bezpiecznemu rozwojowi ucznia (rodzina, przyjaciele);
- 2) wzmacnianie poczucia tożsamości indywidualnej, kulturowej, narodowej, regionalnej i etnicznej;
- 3) formowanie u uczniów poczucia godności własnej osoby i szacunku dla godności innych osób;
- 4) rozwijanie kompetencji takich jak: kreatywność, innowacyjność i przedsiębiorczość;
- 5) rozwijanie umiejętności krytycznego i logicznego myślenia, rozumowania, argumentowania i wnioskowania;
- 6) ukazywanie wartości wiedzy jako podstawy do rozwoju umiejętności;
- 7) rozbudzanie ciekawości poznawczej uczniów oraz motywacji do nauki;
- 8) wyposażenie uczniów w taki zasób wiadomości oraz kształtowanie takich umiejętności, które pozwalają w sposób bardziej dojrzały i uporządkowany zrozumieć świat;
- 9) wspieranie ucznia w rozpoznawaniu własnych predyspozycji i określaniu drogi dalszej edukacji;
- 10) wszechstronny rozwój osobowy ucznia przez pogłębianie wiedzy oraz zaspokajanie i rozbudzanie jego naturalnej ciekawości poznawczej;
- 11) kształtowanie postawy otwartej wobec świata i innych ludzi, aktywności w życiu społecznym oraz odpowiedzialności za zbiorowość;
- 12) zachęcanie do zorganizowanego i świadomego samokształcenia opartego na umiejętności przygotowania własnego warsztatu pracy;
- 13) ukierunkowanie ucznia ku wartościom.

Najważniejsze umiejętności rozwijane w ramach kształcenia ogólnego w szkole podstawowej to:

- 1) sprawne komunikowanie się w języku polskim oraz w językach obcych nowożytnych;
- 2) sprawne wykorzystywanie narzędzi matematyki w życiu codziennym, a także kształcenie myślenia matematycznego;

- 3) poszukiwanie, porządkowanie, krytyczna analiza oraz wykorzystanie informacji z różnych źródeł;
- 4) kreatywne rozwiązywanie problemów z różnych dziedzin ze świadomym wykorzystaniem metod i narzędzi wywodzących się z informatyki, w tym programowanie;
- 5) rozwiązywanie problemów, również z wykorzystaniem technik mediacyjnych;
- 6) praca w zespole i społeczna aktywność;
- 7) aktywny udział w życiu kulturalnym szkoły, środowiska lokalnego oraz kraju.

W procesie kształcenia ogólnego szkoła podstawowa na każdym przedmiocie kształtuje kompetencje językowe uczniów oraz dba o wyposażenie uczniów w wiadomości i umiejętności umożliwiające komunikowanie się w języku polskim w sposób poprawny i zrozumiały.

Ważnym zadaniem szkoły jest kształcenie w zakresie porozumiewania się w językach obcych nowożytnych. W klasach I–VI szkoły podstawowej uczniowie uczą się jednego języka obcego nowożytnego, natomiast w klasach VII i VIII – dwóch języków obcych nowożytnych. Od klasy VII uczniowie mogą także realizować nauczanie dwujęzyczne, jeżeli szkoła zorganizuje taką formę kształcenia.

Zadaniem szkoły podstawowej jest wprowadzenie uczniów w świat literatury, ugruntowanie ich zainteresowań czytelniczych oraz wyposażenie w kompetencje czytelnicze potrzebne do krytycznego odbioru utworów literackich i innych tekstów kultury. Szkoła podejmuje działania mające na celu rozbudzenie u uczniów zamiłowania do czytania oraz działania sprzyjające zwiększeniu aktywności czytelniczej uczniów, kształtuje postawę dojrzałego i odpowiedzialnego czytelnika, przygotowanego do otwartego dialogu z dziełem literackim. W procesie kształcenia i wychowania wskazuje rolę biblioteki (szkolnej, publicznej, naukowej i in.) oraz zachęca do podejmowania indywidualnych prób twórczych.

Wysokie kompetencje czytelnicze wpływają na sukces uczniów w szkole, a w późniejszym życiu pozwalają pokonywać uczniom ograniczenia i trudności związane z mniej sprzyjającym środowiskiem społecznym.

Czytanie jako umiejętność rozumienia, wykorzystywania i refleksyjnego przetwarzania tekstów, w tym tekstów kultury, to jedna z najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w procesie kształcenia.

Dzieci, które dużo czytają, mają bogaty zasób słownictwa, z łatwością nazywają swoje uczucia i wchodzą w relacje z rówieśnikami, rzadziej sprawiają kłopoty wychowawcze, mając lepiej rozwiniętą wyobraźnię umożliwiającą obiektywne spojrzenie na zachowania własne i innych, w konsekwencji lepiej radzą sobie z obowiązkami szkolnymi, a także funkcjonowaniem w społeczności szkolnej.

Ważne jest, aby zainteresować ucznia czytaniem na poziomie szkoły podstawowej. Uczeń powinien mieć zapewniony kontakt z książką np. przez udział w zajęciach, na których czytane są na głos przez nauczycieli fragmenty lektur lub udział w zajęciach prowadzonych w bibliotece szkolnej. W ten sposób rozwijane są kompetencje czytelnicze, które ukształtują nawyk czytania książek również w dorosłym życiu.



Szkoła ma stwarzać uczniom warunki do nabywania wiedzy i umiejętności potrzebnych do rozwiązywania problemów z wykorzystaniem metod i technik wywodzących się z informatyki, w tym logicznego i algorytmicznego myślenia, programowania, posługiwania się aplikacjami komputerowymi, wyszukiwania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł, posługiwania się komputerem i podstawowymi urządzeniami cyfrowymi oraz stosowania tych umiejętności na zajęciach z różnych przedmiotów m.in. do pracy nad tekstem, wykonywania obliczeń, przetwarzania informacji i jej prezentacji w różnych postaciach.

Szkoła ma również przygotowywać ich do dokonywania świadomych i odpowiedzialnych wyborów w trakcie korzystania z zasobów dostępnych w internecie, krytycznej analizy informacji, bezpiecznego poruszania się w przestrzeni cyfrowej, w tym nawiązywania i utrzymywania opartych na wzajemnym szacunku relacji z innymi użytkownikami sieci.

Szkoła oraz poszczególni nauczyciele podejmują działania mające na celu zindywidualizowane wspomaganie rozwoju każdego ucznia, stosownie do jego potrzeb i możliwości.

Uczniom z niepełnosprawnościami, w tym uczniom z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu lekkim, nauczanie dostosowuje się do ich możliwości psychofizycznych oraz tempa uczenia się. Wybór form indywidualizacji nauczania powinien wynikać z rozpoznania potencjału każdego ucznia. Jeśli nauczyciel pozwoli uczniowi na osiągnięcie sukcesu na miarę jego możliwości, wówczas ma on szansę na rozwój ogólny i edukacyjny. Zatem nauczyciel powinien tak dobierać zadania, aby z jednej strony nie przerastały one możliwości ucznia (uniemożliwiały osiągnięcie sukcesu), a z drugiej nie powodowały obniżenia motywacji do radzenia sobie z wyzwaniami.

Ważną rolę w kształceniu i wychowaniu uczniów w szkole podstawowej odgrywa edukacja zdrowotna. Zadaniem szkoły jest kształtowanie postaw prozdrowotnych uczniów, w tym wdrożenie ich do zachowań higienicznych, bezpiecznych dla zdrowia własnego i innych osób, a ponadto ugruntowanie wiedzy z zakresu prawidłowego odżywiania się, korzyści płynących z aktywności fizycznej, a także stosowania profilaktyki.

Kształcenie i wychowanie w szkole podstawowej sprzyja rozwijaniu postaw obywatelskich, patriotycznych i społecznych uczniów. Zadaniem szkoły jest wzmacnianie poczucia tożsamości narodowej, przywiązania do historii i tradycji narodowych, przygotowanie i zachęcanie do podejmowania działań na rzecz środowiska szkolnego i lokalnego, w tym do angażowania się w wolontariat. Szkoła dba o wychowanie dzieci i młodzieży w duchu akceptacji i szacunku dla drugiego człowieka, kształtuje postawę szacunku dla środowiska przyrodniczego, w tym upowszechnia wiedzę o zasadach zrównoważonego rozwoju, motywuje do działań na rzecz ochrony środowiska oraz rozwija zainteresowanie ekologią.

Zadaniem szkoły jest przygotowanie uczniów do wyboru kierunku kształcenia i zawodu. Szkoła prowadzi zajęcia z zakresu doradztwa zawodowego.

Duże znaczenie dla rozwoju młodego człowieka oraz jego sukcesów w dorosłym życiu ma nabywanie kompetencji społecznych takich jak komunikacja i współpraca w grupie,

w tym w środowiskach wirtualnych, udział w projektach zespołowych lub indywidualnych oraz organizacja i zarządzanie projektami.

Zastosowanie metody projektu, oprócz wspierania w nabywaniu wspomnianych wyżej kompetencji, pomaga również rozwijać u uczniów przedsiębiorczość i kreatywność oraz umożliwia stosowanie w procesie kształcenia innowacyjnych rozwiązań programowych, organizacyjnych lub metodycznych.

Metoda projektu zakłada znaczną samodzielność i odpowiedzialność uczestników, co stwarza uczniom warunki do indywidualnego kierowania procesem uczenia się. Wspiera integrację zespołu klasowego, w którym uczniowie, dzięki pracy w grupie, uczą się rozwiązywania problemów, aktywnego słuchania, skutecznego komunikowania się, a także wzmacniają poczucie własnej wartości. Metoda projektu wdraża uczniów do planowania oraz organizowania pracy, a także dokonywania samooceny. Projekty swoim zakresem mogą obejmować jeden lub więcej przedmiotów. Pozwalają na współdziałanie szkoły ze środowiskiem lokalnym oraz na zaangażowanie rodziców uczniów.

Projekty mogą być wykonywane indywidualnie lub zespołowo. Uczniowie podczas pracy nad projektami powinni mieć zapewnioną pomoc nauczyciela – opiekuna. Nauczyciele korzystający z metody projektu mogą indywidualizować techniki pracy, różnicując wymagania.

Wyboru treści podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, które będą realizowane metodą projektu, może dokonywać nauczyciel samodzielnie lub w porozumieniu z uczniami.

Projekt, w zależności od potrzeb, może być realizowany np. przez tydzień, miesiąc, semestr lub być działaniem całorocznym. W organizacji pracy szkoły można uwzględnić również takie rozwiązanie, które zakłada, że w określonym czasie w szkole nie są prowadzone zajęcia z podziałem na poszczególne lekcje, lecz są one realizowane metodą projektu.

Przy realizacji projektu wskazane jest wykorzystywanie technologii informacyjno-komunikacyjnych.

Opis wiadomości i umiejętności zdobytych przez ucznia w szkole podstawowej jest przedstawiany w języku efektów uczenia się, zgodnie z Polską Ramą Kwalifikacji<sup>1</sup>.

Działalność edukacyjna szkoły określona jest przez:

- 1) szkolny zestaw programów nauczania;
- 2) program wychowawczo-profilaktyczny szkoły.

Szkolny zestaw programów nauczania oraz program wychowawczo-profilaktyczny szkoły tworzą spójną całość i muszą uwzględniać wszystkie wymagania opisane w podstawie programowej. Ich przygotowanie i realizacja są zadaniem zarówno całej szkoły, jak i każdego nauczyciela.

<sup>1</sup> Ustawa z dnia 22 grudnia 2015 r. o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji (Dz.U. z 2016 r., poz. 64, z późn. zm.).

Obok zadań wychowawczych i profilaktycznych nauczyciele wykonują również działania opiekuńcze odpowiednio do istniejących potrzeb.

Działalność wychowawcza szkoły należy do podstawowych celów polityki oświatowej państwa. Wychowanie młodego pokolenia jest zadaniem rodziny i szkoły, która w swojej działalności musi uwzględniać wolę rodziców, ale także i państwa, do którego obowiązków należy stwarzanie właściwych warunków wychowania. Zadaniem szkoły jest ukierunkowanie procesu wychowawczego na wartości, które wyznaczają cele wychowania i kryteria jego oceny. Wychowanie ukierunkowane na wartości zakłada przede wszystkim podmiotowe traktowanie ucznia, a wartości skłaniają człowieka do podejmowania odpowiednich wyborów czy decyzji. W realizowanym procesie dydaktyczno-wychowawczym szkoła podejmuje działania związane z miejscami ważnymi dla pamięci narodowej, formami upamiętniania postaci i wydarzeń z przeszłości, najważniejszymi świętami narodowymi i symbolami państwowymi.

W szkole podstawowej na I etapie edukacyjnym, obejmującym klasy I–III – edukacja wczesnoszkolna, edukacja realizowana jest w formie kształcenia zintegrowanego. Na II etapie edukacyjnym, obejmującym klasy IV–VIII, realizowane następujące przedmioty:

- 1) język polski;
- 2) język obcy nowożytny;
- 3) drugi język obcy nowożytny;
- 4) muzyka;
- 5) plastyka;
- 6) historia;
- 7) wiedza o społeczeństwie;
- 8) przyroda;
- 9) geografia;
- 10) biologia;
- 11) chemia;
- 12) fizyka;
- 13) matematyka;
- 14) informatyka;
- 15) technika;
- 16) wychowanie fizyczne;
- 17) edukacja dla bezpieczeństwa;
- 18) wychowanie do życia w rodzinie<sup>2</sup>;
- 19) etyka;
- 20) język mniejszości narodowej lub etnicznej<sup>3</sup>;
- 21) język regionalny – język kaszubski<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Sposób nauczania przedmiotu wychowanie do życia w rodzinie określają przepisy wydane na podstawie art. 4 ust. 3 *Ustawy z dnia 7 stycznia 1993 r. o planowaniu rodziny, ochronie płodu ludzkiego i warunkach dopuszczalności przerywania ciąży* (Dz.U. z 1993 r. nr 17 poz. 78, z późn. zm.)

<sup>3</sup> Przedmiot język mniejszości narodowej lub etnicznej oraz przedmiot język regionalny – język kaszubski jest realizowany w szkołach (oddziałach) z nauczaniem języka mniejszości narodowych lub etnicznych oraz języka regionalnego – języka kaszubskiego, zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 13 ust. 3 *Ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty* (Dz.U. z 2016 r., poz. 1943, z późn. zm.)

## Matematyka

Matematyka jest nauką, która dostarcza narzędzi do poznawania środowiska i opisu zjawisk, dotyczących różnych aspektów działalności człowieka. Funkcjonowanie w konkretnych sytuacjach życiowych, rozwiązywanie typowych i nietypowych problemów, którym trzeba stawić czoła w różnych etapach życia, staje się łatwiejsze dzięki umiejętnościom kształconym przez matematykę. Podejmowanie właściwych decyzji, organizacja własnych działań czy precyzyjne porozumiewanie się często są niemożliwe bez umiejętności matematycznych. Znaczenie matematyki dla indywidualnego rozwoju jest nie do przecenienia.

Nauczanie matematyki w szkole powinno być dostosowane do konkretnego etapu rozwojowego i możliwości intelektualnych uczniów. Na I etapie edukacyjnym nauczanie matematyki powinno być organizowane w taki sposób, by uczniowie koncentrowali się na odniesieniach do znanej sobie rzeczywistości, a stosowane pojęcia i metody powinny być powiązane z obiektami, występującymi w znanym środowisku. Uczniowie muszą mieć szansę na stosowanie kształconych umiejętności w sytuacjach konkretnych, a poszukiwanie odpowiedzi na stawiane pytania powinno pomóc im w organizowaniu własnej nauki i osiąganiu nowych możliwości działania. Ostatnie lata szkoły podstawowej to w przypadku matematyki czas na wprowadzenie takich pojęć i własności, które pozwolą na doskonalenie myślenia abstrakcyjnego, a w konsekwencji na naukę przeprowadzania rozumowań i poprawnego wnioskowania w sytuacjach nowych, a także dotyczących zagadnień złożonych i nietypowych.

## Podstawa programowa przedmiotu *matematyka*

### Cele kształcenia – wymagania ogólne

- I. Sprawności rachunkowa.
  1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub w działaniach trudniejszych pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.
  2. Weryfikowanie i interpretowanie otrzymanych wyników oraz ocena sensowności rozwiązania.
- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
  1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.
  2. Interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych.
  3. Używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.

2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.
- IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.
  2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.
  3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.

### Treści nauczania – wymagania szczegółowe

#### KLASY IV–VI

- I. Liczby naturalne w dziesiętkowym układzie pozycyjnym. Uczeń:
  - 1) zapisuje i odczytuje liczby naturalne wielocyfrowe;
  - 2) interpretuje liczby naturalne na osi liczbowej;
  - 3) porównuje liczby naturalne;
  - 4) zaokrągla liczby naturalne;
  - 5) liczby w zakresie do 3 000 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiętkowym, a zapisane w systemie dziesiętkowym przedstawia w systemie rzymskim.
- II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:
  - 1) dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe lub większe, liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej;
  - 2) dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe sposobem pisemnym i za pomocą kalkulatora;
  - 3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);
  - 4) wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych;
  - 5) stosuje wygodne dla siebie sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania;
  - 6) porównuje liczby naturalne z wykorzystaniem ich różnicy lub ilorazu;
  - 7) rozpoznaje liczby podzielne przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100;
  - 8) rozpoznaje liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także gdy na istnienie dzielnika właściwego wskazuje cecha podzielności;
  - 9) rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze;
  - 10) oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych;
  - 11) stosuje reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;
  - 12) szacuje wyniki działań;
  - 13) znajduje największy wspólny dzielnik (NWD) w sytuacjach nie trudniejszych niż typu  $\text{NWD}(600, 72)$ ,  $\text{NWD}(140, 567)$ ,  $\text{NWD}(10000, 48)$ ,  $\text{NWD}(910, 2016)$

- oraz wyznacza najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb naturalnych metodą rozkładu na czynniki;
- 14) rozpoznaje wielokrotności danej liczby, kwadraty, sześciany, liczby pierwsze, liczby złożone;
  - 15) odpowiada na pytania dotyczące liczebności zbiorów różnych rodzajów liczb wśród liczb z pewnego niewielkiego zakresu (np. od 1 do 200 czy od 100 do 1000), o ile liczba w odpowiedzi jest na tyle mała, że wszystkie rozważane liczby uczeń może wypisać;
  - 16) rozkłada liczby naturalne na czynniki pierwsze, w przypadku gdy co najwyżej jeden z tych czynników jest liczbą większą niż 10;
  - 17) wyznacza wynik dzielenia z resztą liczby  $a$  przez liczbę  $b$  i zapisuje liczbę  $a$  w postaci:  $a = b \cdot q + r$ .

III. Liczby całkowite. Uczeń:

- 1) podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych;
- 2) interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej;
- 3) oblicza wartość bezwzględną;
- 4) porównuje liczby całkowite;
- 5) wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych.

IV. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń:

- 1) opisuje część danej całości za pomocą ułamka;
- 2) przedstawia ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek zwykły;
- 3) skraca i rozszerza ułamki zwykłe;
- 4) sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika;
- 5) przedstawia ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej, a liczbę mieszaną w postaci ułamka niewłaściwego;
- 6) zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie;
- 7) zaznacza i odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej;
- 8) zapisuje ułamki dziesiętne skończone w postaci ułamków zwykłych;
- 9) zamienia ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1 000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie lub skracanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora);
- 10) zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w pkt 9 w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem wielokropka po ostatniej cyfrze), uzyskane w wyniku dzielenia licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora;
- 11) zaokrągla ułamki dziesiętne;
- 12) porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne);
- 13) oblicza liczbę, której część jest podana (wyznacza całość, z której określono część za pomocą ułamka);
- 14) wyznacza liczbę, która powstaje po powiększeniu lub pomniejszeniu o pewną część innej liczby.



## V. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:

- 1) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane;
- 2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci (w przykładach najprostszych), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w przykładach trudnych);
- 3) wykonuje nieskomplikowane rachunki, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne;
- 4) porównuje ułamki z wykorzystaniem ich różnicy;
- 5) oblicza ułamek danej liczby całkowitej;
- 6) oblicza kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz liczb mieszanych;
- 7) oblicza wartość prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;
- 8) wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych, poprawnych strategii lub za pomocą kalkulatora;
- 9) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych, wymagających stosowania działań arytmetycznych na liczbach całkowitych lub liczbach zapisanych za pomocą ułamków zwykłych, liczb mieszanych i ułamków dziesiętnych, także wymiernych ujemnych o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie

$$-\frac{1}{2} : 0,25 + 5,25 : 0,05 - 7\frac{1}{2} \cdot (2,5 - 3\frac{2}{3}) + 1,25.$$

## VI. Elementy algebry. Uczeń:

- 1) korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, opisuje wzór słowami;
- 2) stosuje oznaczenia literowe nieznanymi wielkościami liczbowymi i zapisuje proste wyrażenia algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym, na przykład zapisuje obwód trójkąta o bokach:  $a$ ,  $a+2$ ,  $b$ ; rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (przez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego), na przykład  $\frac{x-2}{3} = 4$ .

## VII. Proste i odcinki. Uczeń:

- 1) rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek;
- 2) rozpoznaje proste i odcinki prostopadłe i równoległe, na przykład jak w sytuacji określonej w zadaniu:  
Odcinki  $AB$  i  $CD$  są prostopadłe, odcinki  $CD$  i  $EF$  są równoległe oraz odcinki  $EF$  i  $DF$  są prostopadłe. Określ wzajemne położenie odcinków  $DF$  oraz  $AB$ . Wykonaj odpowiedni rysunek;
- 3) rysuje pary odcinków prostopadłych i równoległych;
- 4) mierzy odcinek z dokładnością do 1 mm;
- 5) znajduje odległość punktu od prostej.

## VIII. Kąty. Uczeń:

- 1) wskazuje w dowolnym kącie ramiona i wierzchołek;
- 2) mierzy z dokładnością do  $1^\circ$  kąty mniejsze niż  $180^\circ$ ;

- 3) rysuje kąty mniejsze od  $180^\circ$ ;
- 4) rozpoznaje kąt prosty, ostry i rozwarty;
- 5) porównuje kąty;
- 6) rozpoznaje kąty wierzchołkowe i przyległe oraz korzysta z ich własności.

IX. Wielokąty, koła i okręgi. Uczeń:

- 1) rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne, równoboczne i równoramienne;
- 2) konstruuje trójkąt o danych trzech bokach i ustala możliwość zbudowania trójkąta na podstawie nierówności trójkąta;
- 3) stosuje twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych trójkąta;
- 4) rozpoznaje i nazywa: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok i trapez;
- 5) zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku i trapezu, rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje osie symetrii figur;
- 6) wskazuje na rysunku cięciwę, średnicę oraz promień koła i okręgu;
- 7) rysuje cięciwę koła i okręgu, a także, jeżeli dany jest środek okręgu, promień i średnicę;
- 8) w trójkącie równoramiennym wyznacza przy danym jednym kącie miary pozostałych kątów oraz przy danych obwodzie i długości jednego boku długości pozostałych boków.

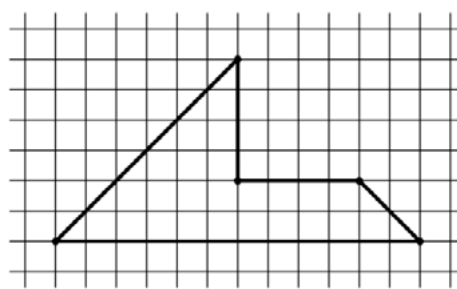
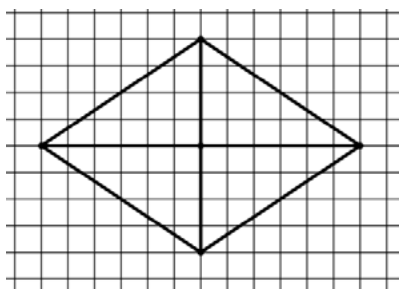
X. Bryły. Uczeń:

- 1) rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył;
- 2) wskazuje wśród graniastosłupów prostopadłościanny i sześciiany i uzasadnia swój wybór;
- 3) rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów;
- 4) rysuje siatki prostopadłościannów;
- 5) wykorzystuje podane zależności między długościami krawędzi graniastosłupa do wyznaczania długości poszczególnych krawędzi.

XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń:

- 1) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków;
- 2) oblicza pola: trójkąta, kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu, przedstawionych na rysunku oraz w sytuacjach praktycznych, w tym także dla danych wymagających zamiany jednostek i w sytuacjach z nietypowymi wymiarami, na przykład pole trójkąta o boku 1 km i wysokości 1 mm;
- 3) stosuje jednostki pola:  $\text{mm}^2$ ,  $\text{cm}^2$ ,  $\text{dm}^2$ ,  $\text{m}^2$ ,  $\text{km}^2$ , ar, hektar (bez zamiany jednostek w trakcie obliczeń);
- 4) oblicza pola wielokątów metodą podziału na mniejsze wielokąty lub uzupełniania do większych wielokątów jak w sytuacjach:





- 5) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi;
- 6) stosuje jednostki objętości i pojemności: mililitr, litr,  $\text{cm}^3$ ,  $\text{dm}^3$ ,  $\text{m}^3$ ;
- 7) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów.

#### XII. Obliczenia praktyczne. Uczeń:

- 1) interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, 1% – jako jedną setną część danej wielkości liczbowej;
- 2) w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza procent danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 20%, 10%;
- 3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach;
- 4) wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach;
- 5) odczytuje temperaturę (dodatnią i ujemną);
- 6) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: milimetr, centymetr, decymetr, metr, kilometr;
- 7) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki masy: gram, dekagram, kilogram, tona;
- 8) oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość;
- 9) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i czasie, prędkość przy danej drodze i czasie, czas przy danej drodze i prędkości oraz stosuje jednostki prędkości  $\text{km/h}$  i  $\text{m/s}$ .

#### XIII. Elementy statystyki opisowej. Uczeń:

- 1) gromadzi i porządkuje dane;
- 2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, na diagramach i na wykresach, na przykład: wartości z wykresu, wartość największą, najmniejszą, opisuje przedstawione w tekstach, tabelach, na diagramach i na wykresach zjawiska przez określenie przebiegu zmiany wartości danych, na przykład z użyciem określenia „wartości rosną”, „wartości maleją”, „wartości są takie same” („przyjmowana wartość jest stała”).

#### XIV. Zadania tekstowe. Uczeń:

- 1) czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe;

- 2) wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla niego zapisanie informacji i danych z treści zadania;
- 3) dostrzega zależności między podanymi informacjami;
- 4) dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania;
- 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody;
- 6) weryfikuje wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania np. poprzez szacowanie, sprawdzanie wszystkich warunków zadania, ocenianie rzędu wielkości otrzymanego wyniku;
- 7) układa zadania i łamigłówki, rozwiązuje je; stawia nowe pytania związane z sytuacją w rozwiązującym zadaniu.

## KLASY VII i VIII

### I. Potęgi o podstawach wymiernych. Uczeń:

- 1) zapisuje iloczyn jednakowych czynników w postaci potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim;
- 2) mnoży i dzieli potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich;
- 3) mnoży potęgi o różnych podstawach i jednakowych wykładnikach;
- 4) podnosi potęgę do potęgi;
- 5) odczytuje i zapisuje liczby w notacji wykładniczej  $a \cdot 10^k$ , gdy  $1 \leq a < 10$ ,  $k$  jest liczbą całkowitą.

### II. Pierwiastki. Uczeń:

- 1) oblicza wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych;
- 2) szacuje wielkość danego pierwiastka kwadratowego lub sześciennego oraz wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki;
- 3) porównuje wartość wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki z daną liczbą wymierną oraz znajduje liczby wymierne większe lub mniejsze od takiej wartości, na przykład znajduje liczbę całkowitą  $a$  taką, że:  $a \leq \sqrt{137} < a + 1$ ;
- 4) oblicza pierwiastek z iloczynu i ilorazu dwóch liczb, wyłącza liczbę przed znak pierwiastka i włącza liczbę pod znak pierwiastka;
- 5) mnoży i dzieli pierwiastki tego samego stopnia.

### III. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i z wieloma zmiennymi. Uczeń:

- 1) zapisuje wyniki podanych działań w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;
- 2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
- 3) zapisuje zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;
- 4) zapisuje rozwiązania zadań w postaci wyrażeń algebraicznych jak w przykładzie: Bartek i Grześ zbierali kasztany. Bartek zebrał  $n$  kasztanów, Grześ

zebrał 7 razy więcej. Następnie Grześ w drodze do domu zgubił 10 kasztanów, a połowę pozostałych oddał Bartkowi. Ile kasztanów ma teraz Bartek, a ile ma Grześ?

IV. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Sumy algebraiczne i działania na nich. Uczeń:

- 1) porządkuje jednomiany i dodaje jednomiany podobne (tzn. różniące się jedynie współczynnikiem liczbowym);
- 2) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne, dokonując przy tym redukcji wyrazów podobnych;
- 3) mnoży sumy algebraiczne przez jednomian i dodaje wyrażenia powstałe z mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany;
- 4) mnoży dwumian przez dwumian, dokonując redukcji wyrazów podobnych.

V. Obliczenia procentowe. Uczeń:

- 1) przedstawia część wielkości jako procent tej wielkości;
- 2) oblicza liczbę  $a$  równą  $p$  procent danej liczby  $b$ ;
- 3) oblicza, jaki procent danej liczby  $b$  stanowi liczba  $a$ ;
- 4) oblicza liczbę  $b$ , której  $p$  procent jest równe  $a$ ;
- 5) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, również w przypadkach wielokrotnych podwyżek lub obniżek danej wielkości.

VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń:

- 1) sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (stopnia pierwszego, drugiego lub trzeciego) z jedną niewiadomą, na przykład sprawdza, które liczby całkowite niedodatnie i większe od  $-8$  są rozwiązaniami równania  $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} = 0$ ;
- 2) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych;
- 3) rozwiązuje równania, które po prostych przekształceniach wyrażeń algebraicznych sprowadzają się do równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi;
- 5) przekształca proste wzory, aby wyznaczyć zadaną wielkość we wzorach geometrycznych (np. pól figur) i fizycznych (np. dotyczących prędkości, drogi i czasu).

VII. Proporcjonalność prosta. Uczeń:

- 1) podaje przykłady wielkości wprost proporcjonalnych;
- 2) wyznacza wartość przyjmowaną przez wielkość wprost proporcjonalną w przypadku konkretnej zależności proporcjonalnej, na przykład wartość zakupionego towaru w zależności od liczby sztuk towaru, ilość zużytego paliwa w zależności od liczby przejechanych kilometrów, liczby przeczytanych stron książki w zależności od czasu jej czytania;
- 3) stosuje podział proporcjonalny.

VIII. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń:

- 1) zna i stosuje twierdzenie o równości kątów wierzchołkowych (z wykorzystaniem zależności między kątami przyległymi);
- 2) przedstawia na płaszczyźnie dwie proste w różnych położeniach względem siebie, w szczególności proste prostopadłe i proste równoległe;
- 3) korzysta z własności prostych równoległych, w szczególności stosuje równość kątów odpowiadających i naprzemianległych;
- 4) zna i stosuje cechy przystawiania trójkątów;
- 5) zna i stosuje własności trójkątów równoramiennych (równość kątów przy podstawie);
- 6) zna nierówność trójkąta  $AB + BC \geq AC$  i wie, kiedy zachodzi równość;
- 7) wykonuje proste obliczenia geometryczne wykorzystując sumę kątów wewnętrznych trójkąta i własności trójkątów równoramiennych;
- 8) zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa (bez twierdzenia odwrotnego);
- 9) przeprowadza dowody geometryczne o poziomie trudności nie większym niż w przykładach:
  - a) dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $AC = BC$ . W tym trójkącie poprowadzono wysokość  $AD$ . Udowodnij, że kąt  $ABC$  jest dwa razy większy od kąta  $BAD$ ,
  - b) na bokach  $BC$  i  $CD$  prostokąta  $ABCD$  zbudowano, na zewnątrz prostokąta, dwa trójkąty równoboczne  $BCE$  i  $CDF$ . Udowodnij, że  $AE = AF$ .

IX. Wielokąty. Uczeń:

- 1) zna pojęcie wielokąta foremnego;
- 2) stosuje wzory na pole trójkąta, prostokąta, kwadratu, równoległoboku, rombu, trapezu, a także do wyznaczania długości odcinków o poziomie trudności nie większym niż w przykładach:
  - a) oblicz najkrótszą wysokość trójkąta prostokątnego o bokach długości: 5 cm, 12 cm i 13 cm,
  - b) przekątne rombu  $ABCD$  mają długości  $AC = 8$  dm i  $BD = 10$  dm. Przekątną  $BD$  rombu przedłużono do punktu  $E$  w taki sposób, że odcinek  $BE$  jest dwa razy dłuższy od tej przekątnej. Oblicz pole trójkąta  $CDE$ . (zadanie ma dwie odpowiedzi).

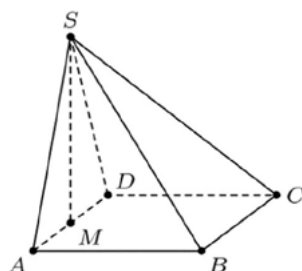
X. Oś liczbowa. Układ współrzędnych na płaszczyźnie. Uczeń:

- 1) zaznacza na osi liczbowej zbiory liczb spełniających warunek taki jak  $x \geq 1,5$  lub taki jak  $x < -\frac{4}{7}$ ;
- 2) znajduje współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie;
- 3) rysuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku);
- 4) znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek;
- 5) oblicza długość odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi w układzie współrzędnych;

- 6) dla danych punktów kratowych  $A$  i  $B$  znajduje inne punkty kratowe należące do prostej  $AB$ .

XI. Geometria przestrzenna. Uczeń:

- 1) rozpoznaje graniastopy i ostrosłupy – w tym proste i prawidłowe;
- 2) oblicza objętości i pola powierzchni graniastopów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe o poziomie trudności nie większym niż w przykładowym zadaniu: Podstawą graniastopu prostego jest trójkąt równoramienny, którego dwa równe kąty mają po  $45^\circ$ , a najdłuższy bok ma długość  $6\sqrt{2}$  dm. Jeden z boków prostokąta, który jest w tym graniastopie ścianą boczną o największej powierzchni, ma długość 4 dm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastopu;
- 3) oblicza objętości i pola powierzchni ostrosłupów prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe o poziomie trudności nie większym niż w przykładzie: Prostokąt  $ABCD$  jest podstawą ostrosłupa  $ABCDS$ , punkt  $M$  jest środkiem krawędzi  $AD$ , odcinek  $MS$  jest wysokością ostrosłupa. Dane są następujące długości krawędzi:  $AD = 10$  cm,  $AS = 13$  cm oraz  $AB = 20$  cm.



Oblicz objętość ostrosłupa.

XII. Wprowadzenie do kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:

- 1) wyznacza zbiory obiektów, analizuje i oblicza, ile jest obiektów, mających daną własność, w przypadkach niewymagających stosowania reguł mnożenia i dodawania;
- 2) przeprowadza proste doświadczenia losowe, polegające na rzucie monetą, rzucie sześcienną kostką do gry, rzucie kostką wielościenne lub losowaniu kuli spośród zestawu kul, analizuje je i oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych.

XIII. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej. Uczeń:

- 1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów, w tym także wykresów w układzie współrzędnych;
- 2) tworzy diagramy słupkowe i kołowe oraz wykresy liniowe na podstawie zebranych przez siebie danych lub danych pochodzących z różnych źródeł;
- 3) oblicza średnią arytmetyczną kilku liczb.

XIV. Długość okręgu i pole koła. Uczeń:

- 1) oblicza długość okręgu o danym promieniu lub danej średnicy;
- 2) oblicza promień lub średnicę okręgu o danej długości okręgu;
- 3) oblicza pole koła o danym promieniu lub danej średnicy;

- 4) oblicza promień lub średnicę koła o danym polu koła;
- 5) oblicza pole pierścienia kołowego o danych promieniach lub średnicach obu okręgów tworzących pierścień.

XV. Symetrie. Uczeń:

- 1) rozpoznaje symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
- 2) zna i stosuje w zadaniach podstawowe własności symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta jak w przykładowym zadaniu: Wierzchołek C rombu ABCD leży na symetralnych boków AB i AD. Oblicz kąty tego rombu;
- 3) rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje ich osie symetrii oraz uzupełnia figurę do figury osiowosymetrycznej przy danych: osi symetrii figury i części figury;
- 4) rozpoznaje figury środkowosymetryczne i wskazuje ich środki symetrii.

XVI. Zaawansowane metody zliczania. Uczeń:

- 1) stosuje regułę mnożenia do zliczania par elementów o określonych własnościach;
- 2) stosuje regułę dodawania i mnożenia do zliczania par elementów w sytuacjach, wymagających rozważenia kilku przypadków, na przykład w zliczaniu liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5 i mających trzy różne cyfry albo jak w zadaniu: W klasie jest 14 dziewczynek i 11 chłopców. Na ile sposobów można z tej klasy wybrać dwuosobową delegację składającą się z jednej dziewczynki i jednego chłopca?

XVII. Rachunek prawdopodobieństwa. Uczeń:

- 1) oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na rzucie dwiema kostkami lub losowaniu dwóch elementów ze zwracaniem;
- 2) oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na losowaniu dwóch elementów bez zwracania jak w przykładzie: Z urny zawierającej kule ponumerowane liczbami od 1 do 7 losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb na wylosowanych kulach będzie parzysta.

### Warunki i sposób realizacji

Proponuje się, aby w latach 2017/18, 2018/19 i 2019/20 w klasie VII zrealizowano dodatkowo dział I pkt 5, dział II pkt 13–17, dział IV pkt 13 i 14, dział V pkt 9, dział IX pkt 8, dział X pkt 5 i dział XI pkt 4 podstawy programowej dla klas IV–VI, o ile nie zostały one wcześniej zrealizowane w klasach IV–VI.

Działy XIV–XVII podstawy programowej dla klas VII i VIII mogą zostać zrealizowane po egzaminie ósmoklasisty.

W klasach IV–VI, kiedy nauka matematyki odbywa się przede wszystkim na konkretnych obiektach, należy przede wszystkim zadbać o pracę na przykładach, bez wprowadzania nadmiaru pojęć abstrakcyjnych. Dużą pomocą dla ucznia jest możliwość



eksperymentowania z liczbami, rozwiązywania zagadek logicznych i logiczno-matematycznych, a także ćwiczenia polegające na pracy lub zabawie z różnymi figurami lub bryłami w geometrii. W szczególności, rozwiązywanie równań przez zgadywanie powinno być w klasach IV–VI traktowane jako poprawna metoda.

W klasach IV–VI zaleca się szczególną ostrożność przy wymaganiu od ucznia ścisłości języka matematycznego. Należy dbać o precyzję wypowiedzi, ale trzeba pamiętać o tym, aby unikać sytuacji, w której uczeń zostaje uznany za nieuzdolnionego matematycznie, gdy nie potrafi wyrazić poprawnego rozwiązania w sposób odpowiednio formalny, zgodnie z oczekiwaniami nauczyciela. Umiejętność posługiwania się takimi pojęciami matematycznymi jak: kąt, długość, pole, suma algebraiczna jest o wiele bardziej istotna niż zapamiętanie formalnej definicji. W nauczaniu matematyki istotne jest, aby uczeń zrozumiał sens reguł formalnych.

Większość uczniów w praktyce korzysta z kalkulatorów bądź innych urządzeń elektronicznych. Niemniej umiejętność wykonywania rachunków w pamięci, a także pisemnie, jest istotna. Obliczenia pamięciowe, w tym szacowanie wyników, bardzo przydają się w życiu codziennym. Samodzielne wykonywanie obliczeń, zarówno pamięciowych jak i pisemnych, daje uczniom o wiele lepsze wyobrażenie o liczbach i ich wielkościach, niż prowadzenie rachunków za pomocą sprzętu elektronicznego.

Myślenie abstrakcyjne kształtuje się w wieku 11–15 lat, ale u wielu dzieci w różnym tempie, nie musi to oznaczać większych bądź mniejszych zdolności matematycznych. Z uwagi na różną szybkość rozwoju myślenia uczniów klas VII i VIII, a także, częściowo klasy VI, można rozważyć wprowadzenie nauczania matematyki w grupach międzyoddziałowych na różnych poziomach, podobnie jak to jest praktykowane w nauczaniu języków obcych nowożytnych. Grupy międzyoddziałowe realizowałyby różne partie materiału w tempie dostosowanym do możliwości uczniów, przy zachowaniu realizacji podstawy programowej. Takie podejście nie powinno dzielić uczniów na lepszych lub gorszych, ale ma umożliwić uczniom, u których myślenie abstrakcyjne rozwija się wolniej, płynne przejście do etapu myślenia abstrakcyjnego. Uczniom, u których to myślenie rozwinęło się szybciej, należy proponować zadania trudniejsze i pozwalające na głębszą analizę zagadnień, aby właściwie stymulować ich rozwój.

Zadania na dowodzenie stanowią ważny element wykształcenia matematycznego. Uczeń powinien dowiedzieć się, że w twierdzeniach zaczynających się od słów „wykaż, że dla każdego...” podawanie wielu przykładów nie jest dowodem, a podanie jednego kontrprzykładu świadczy o tym, że stwierdzenie nie jest prawdziwe. Nie oznacza to, że uczeń nie powinien szukać przykładów bądź kontrprzykładów. Często takie poszukiwanie i sprawdzanie prawdziwości tezy dla konkretnych przypadków pozwala uczniowi zrozumieć postawiony problem, a następnie podać ogólne rozumowanie.

W szkole podstawowej zadania na dowodzenie powinny być proste (w przypadku zdolnych uczniów można rozszerzyć stopień trudności). Oznacza to, że na przykład do dowodu zadania z geometrii powinno wystarczyć obliczanie kątów (z wykorzystaniem równości kątów wierzchołkowych, odpowiadających i naprzemianległych, twierdzenia o sumie kątów trójkąta oraz twierdzenia o kątach przy podstawie trójkąta równoramiennego),

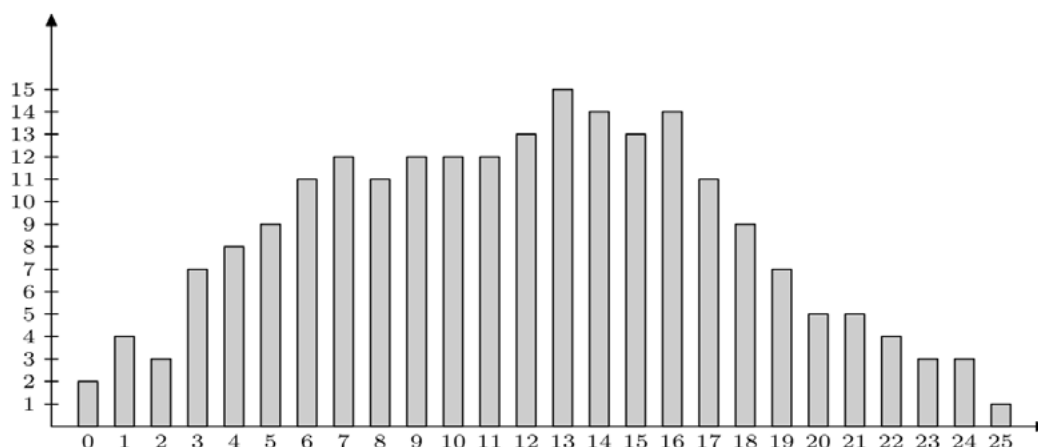
użycie cech przystawiania trójkątów do uzasadnienia przystawiania jednej dostrzeżonej pary trójkątów przystających oraz wyciągnięcie wniosków z tej własności.

Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa należy poprzedzić zadaniami, w których uczniowie wykonują doświadczenia, na przykład wielokrotne rzuty kostką. Można wówczas wskazać związek pomiędzy częstością zdarzenia a jego prawdopodobieństwem.

Szczególne rolę w kształceniu matematycznym odgrywają zadania ze statystyki. Z jednej strony odczytywanie i prezentowanie danych, wiąże matematykę z życiem codziennym i otwiera cały wachlarz zastosowań praktycznych. Wskazane jest, aby znaczna część zadań dotyczyła danych rzeczywistych wraz z podaniem ich weryfikowalnego źródła. Z drugiej strony, na przykład operowanie wykresami zależności pozwala na intuicyjne opanowanie trudnych i abstrakcyjnych pojęć takich jak funkcja, monotoniczność, ekstrema, przy użyciu minimalnej wiedzy matematycznej (nie należy wprowadzać tych pojęć w szkole podstawowej). Stanowi to wstęp do wprowadzenia tych pojęć w szkole ponadpodstawowej. Dla przykładu załączono kilka zadań ze statystyki, z których część może być wykorzystana na zajęciach, bądź w projektach edukacyjnych uczniowskich.

1. We wszystkich trzech klasach VI w pewnej szkole przeprowadzono ankietę „Jaki smak lodów lubisz najbardziej?”. W ankiecie wzięli udział wszyscy uczniowie z tych klas. Wyniki, jakie otrzymano, były następujące: w klasie VIa – 12 osób wybrało lody czekoladowe, 7 osób – lody waniliowe, a 6 osób – lody truskawkowe. W klasie VIb – 5 osób wybrało lody waniliowe, 10 osób – lody truskawkowe, a 6 osób – lody czekoladowe. W ostatniej klasie VIc po 7 osób wybrało lody truskawkowe i lody czekoladowe, a 9 osób lody waniliowe. Wykonaj diagram słupkowy przedstawiający wyniki tej ankiety. Odczytaj, które lody cieszą się największą popularnością w klasach VI w tej szkole.
2. Odczytaj z prognozy pogody (podanej w formie meteorogramu), w którym z najbliższych dni prognozowana temperatura będzie największa. Podaj, w jakich godzinach, według prognozy, temperatura powietrza będzie rosła, a w jakich malała. W którym z najbliższych dni pogoda będzie najlepsza do organizacji wycieczki? Odpowiedź uzasadnij.
3. W konkursie matematycznym startowało 220 uczniów. Każdy zawodnik mógł uzyskać maksymalnie 25 punktów. Poniższy diagram słupkowy pokazuje, ilu uczniów uzyskało poszczególne liczby punktów od 0 do 25. Do następnego etapu konkursu przechodzi 20% uczestników, którzy uzyskali najlepsze wyniki. Wojtek dostał 19 punktów. Czy przejdzie on do następnego etapu?

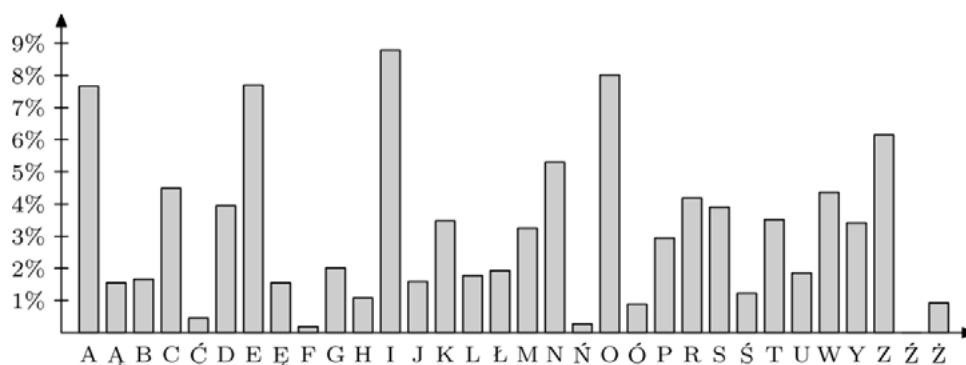


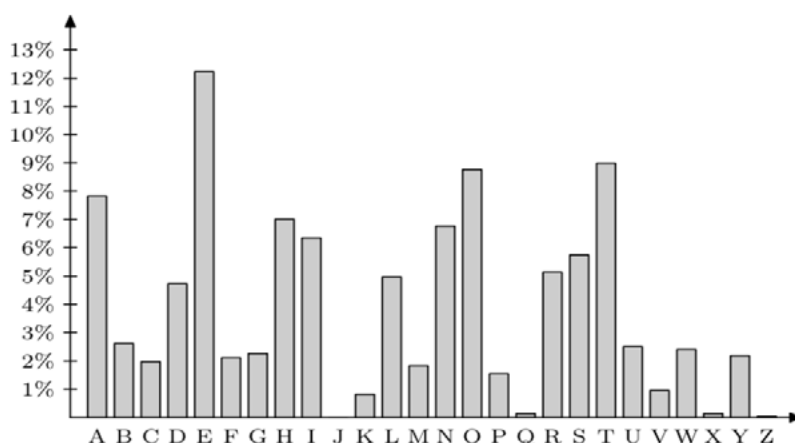


(Odp.: tak).

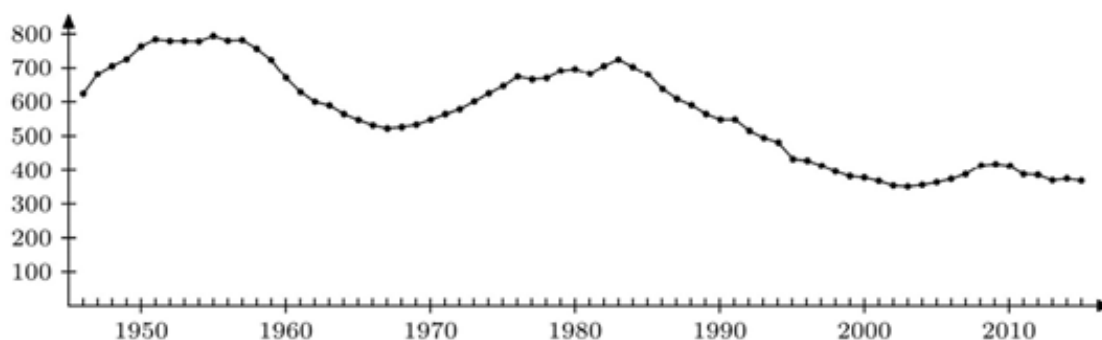
4. Wybierz stronę dowolnego tekstu napisanego w języku polskim. Policz wszystkie litery w tym tekście oraz policz liczbę wystąpień każdej litery alfabetu polskiego. Możesz to łatwo zrobić zapisując cały tekst na przykład w programie Word, a następnie zamieniając każdą literę na przykład na gwiazdkę (użyj: Zamień, a następnie Zamień wszystko; komputer wskaże Ci liczbę dokonanych zamian – jest to liczba wystąpień zamienianej litery w całym tekście). Oblicz częstość występowania każdej litery w całym tekście. Sporządź diagram słupkowy znalezionych częstości występowania. Porównaj otrzymany diagram z diagramami otrzymanymi przez Twoich kolegów na podstawie wybranych przez nich tekstów. Czy te diagramy są podobne? Zrób analogiczne ćwiczenie dla tekstów napisanych w innych językach (na przykład w języku angielskim). Czy otrzymane diagramy częstości są podobne do diagramów dla języka polskiego?

Odp.: odpowiednie diagramy słupkowe sporządzone na podstawie pierwszych 72 wersów Pana Tadeusza oraz pierwszych czterech akapitów powieści Hobbit w języku angielskim wyglądają następująco:





5. Znajdź dane dotyczące liczby urodzin dzieci w Polsce w latach 1946–2015. Sporządź wykres liniowy tych danych (odpowiednio zaokrąglonych). Czy możesz wyjaśnić skąd się biorą znaczne różnice w liczbie urodzin (tzw. wyższe i niższe demograficzne)? Odp.: ten wykres wygląda następująco (dane w tysiącach urodzin):



6. Maciek dostał 10 ocen z matematyki. Oto 9 z nich: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6. Średnia arytmetyczna wszystkich dziesięciu jego ocen jest równa 3,6. Wyznacz brakującą ocenę.  
7. Oblicz pole kwadratu według wzoru  $P = a^2$  dla następujących wartości  $a$ :  $a = \frac{1}{4}$ ,

$$a = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{3}{4}, \quad a = 1, \quad a = \frac{5}{4}, \quad a = \frac{3}{2}, \quad a = \frac{7}{4}, \quad \text{oraz} \quad a = 2$$

Każdą z obliczonych wartości zaznacz na wykresie w układzie współrzędnych, w którym jednostka na osi poziomej (na której są zaznaczone wyłącznie wartości  $a$ ) ma długość 6 cm, a jednostka na osi pionowej (na której są zaznaczone obliczone wartości  $P$ ) ma długość 2 cm.

8. Janek poszedł na wycieczkę pieszą. Od godziny 8<sup>00</sup> do godziny 10<sup>00</sup> szedł pod górę z prędkością 4 km/h; od godziny 10<sup>00</sup> do godziny 10<sup>30</sup> odpoczywał na szczycie góry; od godziny 10<sup>30</sup> do godziny 12<sup>00</sup> szedł z góry z prędkością 6 km/h; od godziny 12<sup>00</sup> do godziny 14<sup>00</sup> szedł po poziomej drodze z prędkością 5 km/h. Począwszy od godziny 8<sup>00</sup> do godziny 14<sup>00</sup>, co 15 minut oblicz, jaką drogę przeszedł od początku wycieczki do danej chwili. Obliczone wielkości zaznacz na wykresie w układzie współrzędnych.

## Komentarz do podstawy programowej przedmiotu *matematyka*

Maciej Borodzik, Regina Pruszyńska

### Ogólne założenia zmian

#### 1. Cele zmian

Tworząc podstawę programową nauczania matematyki dla ośmioletniej szkoły podstawowej, przyjęto założenie, że istniejąca podstawa dla sześcioletniej szkoły podstawowej oraz gimnazjum nie jest zła, a wysiłki ekspertów przygotowujących poprzednią podstawę szły w dobrym kierunku. Za cel postawiono sobie dostosowanie istniejącej podstawy do nowego ustroju szkolnego w Polsce poprzez dokonanie korekt w kilku miejscach. Inaczej mówiąc, zdecydowano spowodować ewolucję podstawy programowej, a nie rewolucję.

#### 2. Cele ogólne nauczania matematyki

Celem nauczania matematyki jest wyrobienie u uczniów intuicji matematycznych właściwych danemu wiekowi. Jednym z zadań w procesie kształcenia ucznia jest rozwinięcie umiejętności wnioskowania, zdolności analitycznych, myślenia strategicznego (a więc umiejętności planowania kolejnych kroków postępowania w celu rozwiązania problemu, a także dzielenia procesu rozwiązywania złożonego problemu na etapy) oraz umiejętności krytycznego spojrzenia na rozwiązanie zadania. Drugim z głównych celów jest rozwinięcie umiejętności rachunkowej na poziomie umożliwiającym rozwiązywanie problemów z zakresu innych przedmiotów w klasach IV–VIII. Powyższe cele, sprecyzowane w podstawie programowej jako cele ogólne, nie różnią się istotnie od celów, które wymienione były w poprzedniej podstawie programowej.

#### 3. Treści nauczania – podobieństwa i różnice w klasach IV–VI

Treści nauczania w klasach IV–VI ośmioletniej szkoły podstawowej odpowiadają w zasadzie treściom nauczanych dotąd w tychże klasach sześcioletniej szkoły podstawowej. Wprowadzono przy tym kilka rozszerzeń, o których mowa poniżej:

##### a) Treści rozszerzające dotychczasowy zakres wymagań

- Po pierwsze, niektóre pojęcia niewymienione w podstawie dla klas IV–VI sześcioletniej szkoły podstawowej (np. największy wspólny dzielnik), które muszą być wspomniane na lekcjach ze względu na inne treści nauczania wymienione w podstawie, pojawiają się w sposób jawny.
- Po drugie, rozszerzony został zakres nauczania niektórych treści nauczania, np. liczb rzymskich z 30 do 3000. Pojawiają się też bardziej złożone przykłady, jak w wypadku obliczania pól figur. Obliczanie pól figur na kratkach nie pojawiało się w poprzedniej podstawie, natomiast doświadczenie uczy, że stanowi ono bardzo dobre przygotowanie uczniów do zrozumienia abstrakcyjnego pojęcia układu współrzędnych. Ponadto daje możliwość wprowadzenia dość różnorodnych zadań na obliczanie pól figur na kratkach poprzez dopełnianie do figur

prostszych albo podział na prostsze figury. Takie zadania nie tylko kształtują ogólne myślenie matematyczne, ale również budują intuicję dotyczącą pojęcia pola.

- Po trzecie, dodano również działania na liczbach wymiernych dowolnego znaku, które do tej pory były w pełni wprowadzane dopiero w gimnazjum.

b) Przyczyny rozszerzenia treści nauczania

Rozszerzenie treści nauczania jest spowodowane również likwidacją sprawdzianu po VI klasie. Odbył się on w kwietniu, treści zawarte w podstawie programowej musiały więc być zrealizowane do końca marca. Pozostały po nim do końca roku szkolnego trzy miesiące, a więc ponad 40 godzin lekcyjnych matematyki do zagospodarowania. Obliczono, że rozszerzenie treści wprowadzone w nowej wersji podstawy powinno zająć około połowy tego czasu. Pozostałe godziny lekcyjne można będzie wykorzystać na pogłębioną realizację podstawy programowej bądź na dodatkowe powtórzenie materiału. W przypadku zrealizowania wszystkich treści nauczania w krótszym czasie, można sięgnąć po zadania trudniejsze, wymagające bardziej złożonego rozumowania, unikając przedwczesnego wprowadzania treści przewyższających w tym momencie możliwości intelektualne większości uczniów. Oprócz zadań dostępnych w dopuszczonych do użytku podręcznikach można na lekcjach wykorzystywać zadania ogólnie dostępne jako otwarte zasoby edukacyjne, na przykład zadania z konkursów matematycznych dla szkół podstawowych.

#### 4. Realizacja podstawy w okresie przejściowym

Treści nauczania rozszerzające zakres materiału w klasach IV–VI ośmioletniej szkoły podstawowej w stosunku do poprzedniej podstawy programowej w latach 2017/2018, 2018/2019 i 2019/2020 powinny być zrealizowane w klasie VII, o ile nie zostały one wcześniej omówione w klasach IV–VI sześcioletniej szkoły podstawowej.

#### 5. Sposób doboru treści nauczania dla klasy VII i VIII

W klasach VII–VIII obecna podstawa programowa została uszczuplona w stosunku do podstawy dla etapu gimnazjalnego. Zredukowanie materiału było niezbędne ze względu na mniejszą liczbę godzin w dwóch ostatnich klasach szkoły podstawowej w stosunku do trzech klas gimnazjum. Pewne modyfikacje były więc konieczne. Przy decyzji, które treści nauczania pozostawić, a które przenieść do szkół ponadpodstawowych, kierowano się objaśnionymi poniżej przesłankami.

Tam, gdzie to możliwe, wybierano treści nauczania stymulujące rozwój myślenia matematycznego u uczniów, pomijając te działy, których realizacja często sprowadza się do powtarzania prostych, wyuczonych algorytmów. Z drugiej strony, przesunięto do realizacji na etapie szkoły ponadpodstawowej treści zbyt abstrakcyjne w stosunku do poziomu rozwoju ucznia w klasach VII–VIII.

#### 6. Wybrane treści nauczania w klasie VII i VIII

a) Kombinatoryka

Jednym z działów pozostawionych w podstawie dla szkoły podstawowej jest kombinatoryka. Zagadnień z nią związanych pojawia się nawet nieco więcej

niż do tej pory w gimnazjum. Pomijając fakt, że kombinatoryka jest rozwijająca, niealgorytmiczna i istotna sama w sobie, ma ona jeszcze jedną zaletę. Otóż uczeń może osiągnąć sukces w kombinatoryce nawet, jeśli jego dotychczasowa wiedza matematyczna była bardzo mała. Realizacja tego działu stwarza okazję „nowego startu” uczniom, którzy do tej pory uzyskiwali na matematyce słabe wyniki. Warto dawać tę szansę uczniom i nie hamować ich zapału poprzez wprowadzanie nadmiaru formalizmu. Nadmienić tu należy, że kombinatoryka jest jedną z najbardziej dynamicznie rozwijających się dziedzin współczesnej matematyki i informatyki.

b) Geometria

Drugim działem, który znacząco wspiera rozwój matematyczny ucznia, jest geometria. Jakkolwiek konieczne było ograniczenie treści nauczania w tym zakresie (ze względu na ramy czasowe), pozostawiono w podstawie dla szkoły podstawowej najważniejszą część tego działu, a mianowicie dowody matematyczne. Sztuki dowodzenia dziecko uczy się latami i nie należy oczekiwać, że pod koniec VIII klasy wszyscy uczniowie będą umieli przeprowadzać dowody złożone z wielu kroków. Z tego względu w nowej podstawie programowej zawarto postulat, aby wymagany od ucznia w szkole podstawowej dowód składał się z nie więcej niż kilku kroków. Zatem nauczyciel może żądać zauważenia co najwyżej jednej pary trójkątów przystających i wyciągnięcia wniosków z tej własności. To ograniczenie jest konieczne, aby uniknąć ryzyka wprowadzania zadań na dowodzenie zbyt trudnych do rozwiązania dla przeciętnego ucznia. Z drugiej strony, dowodzenie jest podstawową umiejętnością matematyka. Wielu ekspertów mówi o potrzebie ponownego wprowadzenia nauczania logiki do szkół, a właśnie dowody najlepiej uczą ścisłego myślenia oraz stosowania logiki w praktyce. Uczeń, który na wcześniejszym etapie zrozumie istotę dowodzenia, o wiele łatwiej opanuje treść zaawansowanych działów matematyki w szkole ponadpodstawowej.

c) O funkcjach inaczej

W podstawie programowej starano się unikać słowa „funkcja”. Nie jest to spowodowane chęcią eliminacji zagadnienia funkcji z nauczania na etapie szkoły podstawowej, ale dążeniem do zniwelowania nadmiernej formalizacji tego pojęcia. Szkolna definicja – brzmiąca: „funkcją nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru  $X$  dokładnie jednego elementu ze zbioru  $Y$ ” – obarczona jest szeregiem wad. Po pierwsze, nic uczniowi nie wyjaśnia. Nawet uczniowie biorący udział w olimpiadach matematycznych na etapie gimnazjum mają problemy ze zrozumieniem definicji – mówimy o zrozumieniu, a nie przyswojeniu pamięciowym. Po wtóre, ta definicja zachęca nauczyciela do sprawdzania, co jest funkcją, a co nią nie jest. Działanie takie wydaje się jednak całkowicie sprzeczne z celem wprowadzania pojęcia funkcji w szkole. Od ucznia oczekuje się bowiem, że będzie umiał operować funkcjami (na poziomie stosownym do swojego etapu rozwoju), a nie sprawdzać, czy spełnione są warunki wymienione w definicji. Szukanie potwierdzenia, że jakieś zjawisko można zakwalifikować jako funkcję, nie ma mocnego uzasadnienia w dydaktyce, podobnie jak sprawdzanie, czy coś jest kątem, albo czy coś jest zmienną. Po trzecie wreszcie, przytoczona wyżej definicja

funkcji – z formalnego punktu widzenia – nie wydaje się całkowicie poprawna. Mianowicie zastępujemy niekiedy słowo „funkcja” słowem „przyporządkowanie”, względnie „odwzorowanie”, które nie zalicza się do podstawowych pojęć w matematyce, a zatem – jeśli chceć wszystko formalizować – również powinno być zdefiniowane. Ścisła definicja słowa „przyporządkowanie” wymaga jednakże wprowadzenia aksjomatyki zrozumiałej dopiero dla studentów studiów matematycznych.

Mając na względzie trzy powyższe argumenty, postuluje się zatem odchodzenie w szkole podstawowej od abstrakcyjnej definicji funkcji. Dopiero w szkole ponadpodstawowej, kiedy będzie mowa o złożeniach funkcji, wspomniana definicja okaże się użyteczna.

Nie oznacza to żadną miarą odejścia od nauczania o funkcjach. W trakcie nauki uczeń napotyka bardzo wiele pojęć, które bywają definiowane wyłącznie intuicyjnie, gdyż ich ścisła abstrakcyjna definicja jest zrozumiała jedynie dla osób zawodowo zajmujących się daną dziedziną, niekoniecznie nawet dla nauczycieli. Takimi pojęciami w matematyce są choćby pole powierzchni czy objętość, w fizyce – na przykład temperatura, w geografii – układ współrzędnych sferycznych.

W intuicyjny sposób funkcje (jako zależności) definiował Stefan Banach w podręczniku *Algebra dla klasy II gimnazjalnej*, podobnie w podręczniku *Rachunek różniczkowy i całkowy* przeznaczonym dla studentów Politechniki Lwowskiej. Starano się powrócić do zaproponowanego przez niego podejścia. Nic zatem nie stoi na przeszkodzie, aby uczeń szkoły podstawowej rozumiał funkcję jako „zależność”, lub jako „coś, co bierze jedną liczbę i wyrzuca drugą” (jak procedura w informatyce), lub jako „coś, co ma wykres” (w rzeczywistości ta ostatnia definicja jest zaskakująco bliska ścisłej definicji funkcji). Oznacza to również, że na lekcjach fizyki i informatyki można posługiwać się pojęciem funkcji wówczas, gdy jest to wskazane.

Funkcje w niniejszej podstawie programowej opisane są w punktach poświęconych statystyce, a nie, jak było do tej pory, w punktach poświęconych układowi współrzędnych; zabieg ten ma zasugerować silniejsze powiązanie pojęcia funkcji ze statystyką. Sformułowania umieszczone w warunkach realizacji podstawy precyzują, jaki poziom zrozumienia pojęcia funkcji jest oczekiwany od ucznia kończącego VIII klasę szkoły podstawowej.

d) Układy równań

W podstawie programowej nauczania matematyki w szkoły podstawowej nie wprowadzono układów równań. W oderwaniu od geometrycznej interpretacji, rozwiązywanie układów równań jest czynnością mechaniczną; dopiero przy wprowadzeniu podstaw funkcji liniowej i geometrii analitycznej, układom równań może towarzyszyć interpretacja geometryczna. Może ona bardzo pomóc przynajmniej niektórym uczniom i sprawić, że rozwiązywanie układów nie będzie tylko ćwiczeniem sprawności rachunkowej. Nie oznacza



to bynajmniej, że w szkołach podstawowych nie mogą pojawić się zadania prowadzące do rozwiązywania układów równań formułowane w postaci zagadek, jak na przykład: „na łące są krowy i bażanty, mają łącznie 100 nóg i 40 głów, określ, ile jest krów, a ile bażantów”. Takie zabawy, zalecane zwłaszcza w klasach młodszych, mogą uczyć bądź to „kombinowania” matematycznego, bądź rozwiązywania równań przez zgadywanie. Jak zaznaczono w warunkach realizacji podstawy, rozwiązanie równania przez zgadywanie powinno być traktowane jako równoprawna metoda rozwiązania problemu do VI klasy włącznie. Zgadywanie rozwija intuicję matematyczną, wyobrażenie o liczbie i uczy umiejętności szacowania. W klasach starszych zadanie o krowach i bażantach można rozwiązać poprzez ułożenie równania z jedną niewiadomą. Przy okazji tego zadania wprowadza się, niejako tylnymi drzwiami, układy równań nieoznaczone i sprzeczne – na przykład zastępując bażanty końmi w treści zadania.

e) Statystyka

Szczególną rolę w nowej podstawie programowej odgrywa statystyka i rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka umożliwia połączenie nauczania matematyki z konkretnymi problemami z życia codziennego. Odczytywanie i prezentowanie danych oraz analizowanie ich własności jest umiejętnością bardzo przydatną w życiu codziennym. Ponadto statystyka umożliwia intuicyjne wprowadzenie wielu pojęć matematycznych bez ich precyzyjnego definiowania, na które przyjdzie czas w szkole ponadpodstawowej. Załączone na końcu podstawy przykłady zadań ze statystyki pozwalają uczniom na intuicyjne przyswojenie sobie takich pojęć jak: „centyl”, „funkcja”, „monotoniczność”. Dla podkreślenia związku statystyki z życiem codziennym ważne jest, aby w zadaniach statystycznych pracować na danych rzeczywistych – np. z Głównego Urzędu Statystycznego, Narodowego Banku Polskiego czy tablic klimatycznych. Warto również nadmienić, że badanie częstości występowania danej litery w tekście, które wymieniono w warunkach realizacji podstawy jako jeden z możliwych problemów statystycznych, zalicza się do metod łamania prostych szyfrów, zatem zadanie typu: „zlicz średnią częstość wystąpienia każdej z liter w tekście” można traktować jako wstęp do kryptografii.

f) Rachunek prawdopodobieństwa

Ścisłe związany ze statystyką jest rachunek prawdopodobieństwa. Pojęcie prawdopodobieństwa okazuje się trudne. Wielu dobrych uczniów na pytanie: „jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w 5000 rzutów monetą wypadnie dokładnie 2500 orłów” odpowiada: „coś koło  $\frac{1}{2}$ ”. Należy więc postarać się, aby uczniowie dokładnie zrozumieli, czym jest prawdopodobieństwo. Dlatego też zdecydowano, by pozostawić w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej elementy rachunku prawdopodobieństwa. Zaleca się poprzeczenie nauki rachunku prawdopodobieństwa wykonaniem dużej liczby eksperymentów (np. rzutów kostką) – tak, aby uczeń zauważył związek między częstością wystąpienia zdarzenia a prawdopodobieństwem. Zrozumienie tej zależności jest o wiele ważniejsze, niż umiejętność mechanicznego operowania definicją prawdopodobieństwa.

- g) Pierwiastki  
Pojęcie pierwiastka kwadratowego pozostawiono w podstawie dla klas VII–VIII ze względu na wykorzystywanie go w obliczeniach nawiązujących do twierdzenia Pitagorasa oraz przy obliczaniu długości boku kwadratu o zadanym polu, natomiast pojęcie pierwiastka sześciennego – ze względu na możliwość wyznaczania np. długości boku sześcianu przy danej objętości.
- h) Wyrażenia algebraiczne  
W zakresie szkoły podstawowej mnożenie dwóch sum algebraicznych jest wprowadzone dla najprostszyc przypadków – to znaczy mnożenia dwóch dwumianów. Liczymy przy tym, że zrozumienie zasady mnożenia sum algebraicznych w prostym przypadku ułatwi nauczanie mnożenia ogólnych sum algebraicznych w szkole ponadpodstawowej. Przy okazji mnożenia dwumianów można wspomnieć o wzorach skróconego mnożenia, nie będą one jednak wymagane na egzaminie w szkole podstawowej. Do podstawy programowej dla szkoły ponadpodstawowej przesunięto wyłączenie jednomianu poza nawias z sumy algebraicznej.

## 7. Zagadnienia przesunięte do szkoły ponadpodstawowej

- a) Potęgowanie  
Z podstawy programowej dla gimnazjum zostały przeniesione do podstawy programowej dla szkoły ponadpodstawowej pojęcia potęgi o wykładniku zerowym i potęgi o wykładniku ujemnym (pozostawiono jedynie notację wykładniczą). Pojawią się one w naturalny sposób na etapie szkoły ponadpodstawowej wraz z potęgą o wykładniku wymiernym. Jest to jeden z przykładów treści nauczania, których wdrażanie sprawia duże trudności w szkole podstawowej, natomiast o wiele mniejsze w liceum, kiedy uczniowie są o rok czy dwa lata starsi.
- b) Proporcjonalność odwrotna  
Przesunięto także do następnego etapu edukacji proporcjonalność odwrotną, która jest pojęciem intuicyjnie klarownym, ale której ścisła, abstrakcyjna definicja może być zbyt trudna do zrozumienia dla uczniów szkół podstawowych.
- c) Elementy geometrii okręgu, niektóre bryły  
Ograniczenia czasowe sprawiły, że do podstawy dla szkół ponadpodstawowych przeniesiono: elementy geometrii okręgu – w tym wielokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu (z wyjątkiem obliczania długości okręgu i pola koła); zastosowania twierdzenia Pitagorasa do obliczeń w geometrii okręgu; długość łuku i pole wycinka kołowego; podobieństwo trójkątów; bryły obrotowe: walec, stożek, kulę; obliczanie objętości i pola powierzchni walca, stożka i kuli.
- d) Konstrukcje geometryczne  
Z zakresu szkoły podstawowej wyeliminowano konstrukcje geometryczne. Ograniczona ilość czasu na realizację materiału przyczynia się do tego, że nie można wprowadzić pełnych konstrukcji geometrycznych (wraz z dowodzeniem poprawności konstrukcji). Aby uczeń był w stanie samodzielnie dowieść poprawności konstrukcji, musi być najpierw nauczony, czym jest dowód. Ponadto, należałoby wcześniej dokładnie wprowadzić geometrię okręgu, w tym



okręgi wpisane i opisane na wielokątach, tak aby zadania konstrukcyjne nie ograniczały się do kilku przykładów. Wszystkie te czynności zajęłyby jednak bardzo dużo czasu. Z drugiej strony, wprowadzenie konstrukcji geometrycznych bez dowodu poprawności wydaje się dość ryzykowne z dydaktycznego i matematycznego punktu widzenia. Konstrukcje geometryczne będą zatem dokładnie omawiane w szkole ponadpodstawowej.

## 8. *Novum* w podstawie programowej

Swego rodzaju *novum* w podstawie programowej stanowi zapis dotyczący treści nauczania niewymaganych na egzaminie w klasie VIII. W założeniu są to treści, które można realizować od kwietnia do czerwca w klasie VIII, jakkolwiek ostateczną decyzję co do terminu ich wdrażania pozostawiono nauczycielowi. Wprowadzenie tak opisanych treści nauczania jest odpowiedzią na postulaty wielu nauczycieli. Do tej pory bowiem żadna podstawa programowa nie miała wyszczególnionych treści, które de facto nie będą wymagane na egzaminie. Ze względu na możliwość nauki jeszcze przez co najmniej 2,5 miesiąca po egzaminie zaproponowano te treści, które będą rozszerzane w szkole ponadpodstawowej.

## 9. Perspektywa zmiany podstawy

W perspektywie następnych kilku lat, kiedy w szkołach będą uczyć się uczniowie, którzy rozpoczęli edukację szkolną w wieku lat siedmiu, i którzy będą realizować nową podstawę programową w klasach I–III, będzie można dokonać korekty obecnej podstawy i przywrócić do szkół podstawowych znaczną część materiału przesuniętego obecnie do szkół ponadpodstawowych.

## 10. Podstawa programowa a rozwój intelektualny ucznia

Zmiany w podstawie programowej zostały wprowadzone ze względu na fakt, iż rozwój umiejętności matematycznych ucznia w klasach IV–VIII w sposób naturalny dzieli się na dwa etapy związane z rozwojem intelektualnym dziecka. Starano się dostosowywać podstawę programową do etapów rozwoju intelektualnego ucznia. Według powszechnie przyjętej teorii Jeana Piageta<sup>4</sup> w okresie nauki w szkole (czyli między 7. a 15. rokiem życia) wyróżnić można dwa etapy rozwoju. Pierwszy z nich to etap operacyjny konkretny, drugi to etap operacyjny formalny.

### a) Etap konkretny

Etap operacyjny konkretny, przypada na lata życia 7–11, a więc trwa w IV i V klasie, zahaczając również o klasę VI. Jest to czas, w którym uczeń poznaje matematykę za pomocą konkretnych odniesień do rzeczywistości. Wszelkie wprowadzane w tym okresie pojęcia i terminy są powiązane ze zjawiskami występującymi w otaczającym świecie. Uczeń uczy się wnioskować, rozpatrując konkretne obiekty i sytuacje. W nauczaniu nacisk kładzie się na arytmetykę i elementarną geometrię. Nie można w tym czasie oczekiwać, że uczeń będzie w stanie przeprowadzać abstrakcyjne rozumowanie. Wydaje się naturalne, iż na tym etapie nie zrozumie także ścisłych definicji abstrakcyjnych pojęć i nie zacznie posługiwać się precyzyjnym językiem matematycznym.

<sup>4</sup> Zob. np.: Piaget J., (1966), *Studia z psychologii dziecka*, Warszawa: PWN

- b) **Etap formalny**  
Rozwój myślenia abstrakcyjnego przypada między 11. a 15. rokiem życia, a więc rozpoczyna się na ogół w klasie szóstej; może on czasem rozpocząć się wcześniej, u części uczniów może przebiegać później. Ten etap rozwoju nazywany jest etapem operacyjnym formalnym. Dopiero wtedy rozwija się umiejętność myślenia abstrakcyjnego, a uczeń potrafi rozumować, korzystając z pojęć abstrakcyjnych. Wtedy też uczeń jest w stanie przyswoić sobie niektóre pojęcia algebraiczne, pojęcie prawdopodobieństwa czy bardziej zaawansowane własności figur geometrycznych. W tym okresie rozpoczyna się uświadamianie, czym jest dowód matematyczny, a uczeń może samodzielnie przeprowadzać dowodzenie prostych stwierdzeń.
- c) **Podział treści nauczania**  
Podział w podstawie programowej na klasy IV–VI i VII–VIII, nie jest więc skutkiem jedynie określonego trybu wprowadzania reformy, ale w pewnym sensie odzwierciedla rozwój intelektualny ucznia. Wizja takiego ukształtowania podstawy programowej nie jest nowa, poprzednia podstawa programowa dla szkół podstawowych zawierała treści nauczania dostosowane do ucznia na etapie operacyjnym konkretnym, zaś podstawa dla gimnazjum – treści dostosowane do ucznia na etapie operacyjnym formalnym. Warto mieć na uwadze istnienie tych etapów rozwoju przy tworzeniu programu nauczania.





**Dobra  
Szkoła**

[www.reformaedukacji.men.gov.pl](http://www.reformaedukacji.men.gov.pl)

[www.ore.edu.pl](http://www.ore.edu.pl)